Universidade Estadual do Oeste do Paraná

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

UNIOESTE – Campus de Cascavel

ALISSON PEREIRA DE SOUZA

MAÍRI POETA CORTINA CASTILHO DA SILVA

MICHELLI NEVES LAVAGNOLI

VITOR AUGUSTO RESENDE CAMPOS

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL

2023

ALISSON PEREIRA DE SOUZA

MAÍRI POETA CORTINA CASTILHO DA SILVA

MICHELLI NEVES LAVAGNOLI

VITOR AUGUSTO RESENDE CAMPOS

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientadores: Renato Ribeiro Guimarães e Sandro Marcos Guzzo.

CASCAVEL

2023

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Sumário

1. Introdução

O presente relatório tem por objetivo apresentar as atividades desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I, voltado ao projeto PROMAT, oferecido pela Professora Doutora Francieli Cristina Agostinetto Antunes, realizado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, que se localiza na Rua Universitária, número 2069, bairro Jardim Universitário, do município de Cascavel – PR.

O PROMAT – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas trata–se de um curso preparatório de matemática, tendo como público–alvo alunos do ensino médio da rede pública de ensino que querem realizar vestibulares e/ou a prova do Enem com a intenção de ingressar no ensino superior. Esse projeto é composto por duas etapas: Conteúdos voltados ao Ensino Fundamental II e Conteúdos voltados ao Ensino Médio. Para as atividades voltadas à disciplina de Estágio Supervisionado I, somente foram abordados conteúdo do Ensino Fundamental.

Durante os encontros, seguimos um cronograma e trabalhamos com os alunos os diversos conteúdos básicos como: fração, razão e proporção; radiciação, potenciação e conjuntos numéricos; equações do 1º e 2º grau; funções do 1º e 2º grau; polinômios e geometria. Em todos os encontros, fornecemos lista de exercícios com o conteúdo trabalhado em sala de aula e disponibilizamos os slides utilizados.

Esse trabalho é composto pela descrição do PROMAT, um artigo, intitulado: Aprendizagem Matemática: Educação Convencional e o Impacto da Utilização de recursos didáticos, os planos de aula de cada encontro, as atividades entregues aos alunos, os relatórios descrevendo os acontecimentos dos encontros e as considerações finais.

2. Promat 2023.

O PROMAT – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à área de Matemática, é um projeto oferecido pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, habitualmente desenvolvido pelo Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, campus de Cascavel e visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores. Entretanto, também atende alunos de graduação.

O programa é dividido em duas partes. A primeira parte é ministrada pelos licenciandos do 3º ano do curso da matemática, matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado I. Essa turma realiza o projeto no primeiro semestre do ano letivo e o conteúdo é referente ao Ensino Fundamental II. Já a segunda parte é ministrada pelos alunos do 4º ano matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II. Essa turma realiza o projeto no segundo semestre do ano letivo e o conteúdo é referente ao Ensino Médio.

São ofertados conteúdos de matemática da educação básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos, na forma de “Curso Preparatório de Matemática”, objetivando a apropriação de determinados conteúdos, conceitos e estruturas matemáticas; que serão executados em 10 (dez) encontros.

O PROMAT ocorre nas dependências da Unioeste, onde os encontros acontecem aos sábados no período da manhã das 8h às 11h e 40 min, com um intervalo de 20 min para o lanche. Ao final do curso, os alunos recebem um certificado referente à carga horária que frequentaram durante os dez encontros.

As aulas foram planejadas pelo grupo de estagiários e revisadas pelos orientadores do grupo, em que, buscamos seguir metodologias apropriadas ao ensino significativo e utilizamos de materiais manipulativos, jogos para a fixação, experimentos que contribuem com a compreensão e tecnologias para facilitar o aprendizado.

3. Artigo

Aprendizagem Matemática: Educação Convencional e o Impacto da Utilização de Recursos Didáticos

Introdução

O modelo de educação tradicional, caracterizado por aulas expositivas e alunos passivos, recebe críticas em relação à sua eficiência na formação dos alunos (Oliveira, 2019). Essa abordagem é centrada na transmissão de conteúdos já organizados previamente pelos professores, limitando, assim, a compreensão do aluno e dificultando a aplicação dos conhecimentos adquiridos (Cabral, 2006).

Essa concepção de educação diverge da proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), visto que esta busca a formalização dos currículos educacionais promovendo uma educação mais abrangente, além da simples transmissão de conhecimentos do professor para o aluno.

Assim, a utilização de jogos como ferramenta pedagógica por exemplo, se torna um aliado na evolução desse ensino tradicional, proporcionando motivação e autoconfiança, além de ser uma prática mais significativa para os estudantes, auxiliando assim na formação de um pensamento matemático (Oliveira et al., 2022).

Desenvolvimento

A metodologia tradicional de ensino é aplicada na maior parte das escolas do Brasil. De acordo com Cardoso (2021), esse modelo de ensino é caracterizado principalmente pelas aulas expositivas, em que o professor apresenta um conteúdo e os alunos copiam. No caso da disciplina de Matemática, Oliveira (2019) explica que geralmente o docente expõe um conceito ou uma definição de um objeto matemático, dá um exemplo em seguida de como aplicar o conteúdo em um problema, e então os alunos resolvem exercícios do mesmo tipo apresentado.

Para entender o papel da educação escolar, Cabral (2006) diferencia três termos que são comumente confundidos: informação, conhecimento e saber. A informação é um elemento externo ao indivíduo, é qualquer tipo de dado que possa ser compreendido pelo sujeito. Enquanto o conhecimento é individual, é concebido pela relação do indivíduo com a informação. E, por fim, o saber representa um conjunto de informações e conhecimentos produzidos ao longo do tempo.

Cabral (2006) também argumenta que um dos principais objetivos da educação é a propagação do saber. Porém, o modelo educacional tradicional "acentua a transmissão de conhecimentos já construídos e estruturados pelo professor" (Cabral, 2006, p. 11), o que muitas vezes acaba separando a matemática de contextos do mundo real, afetando a confiança dos alunos e a aplicabilidade prática dos conceitos no dia a dia, causando impactos negativos.

De acordo com Silva (2020) a educação tradicional prioriza a quantidade de conteúdos trabalhados em vez da compreensão e participação dos alunos. Como o papel do aluno é passivo nesse modelo, raramente ocorrem situações em que a criatividade do discente seja incentivada. O ensino tradicional tende a excluir os alunos do processo de construção do conhecimento. Assim, é necessário "repensar não o conhecimento, mas o tratamento que se dá a ele." (Cabral, 2006)

Essa reflexão sobre a prática educacional pode ser o observado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é

> [...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)

A BNCC orienta também a formulação de currículos e busca integrar a política nacional da Educação Básica, impactando áreas como formação de professores, avalição e elaboração de conteúdos educacionais e ainda definindo parâmetros para proporcionar uma estrutura adequada para o completo desenvolvimento educacional (Brasil, 2018).

Oliveira et al. (2022) explica que, com o intuito de alinhar nacionalmente os currículos, a BNCC estabelece cinco Unidades Temáticas que organizam os conteúdos matemáticos da seguinte forma: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística.

A unidade temática Números, como argumenta Oliveira et al. (2022), é fundamental nos anos iniciais do ensino fundamental, pois forma a base do conhecimento matemático. Essa unidade tem o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento numérico, que envolve a compreensão de como quantificar características de objetos e interpretar argumentos fundamentados em quantidades (Brasil, 2018).

Segundo Brasil (2018), a unidade temática Álgebra tem o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico, que é crucial para empregar modelos matemáticos, além de auxiliar na análise de relações quantitativas entre diferentes magnitudes, e ainda aborda situações matemáticas utilizando letras e outros símbolos.

Já a unidade temática Geometria comtempla vários conceitos e métodos essenciais para solucionar desafios presentes no mundo físico e em diversas esferas do conhecimento. E, como explica Oliveira et al. (2022), através do pensamento geométrico, os estudantes conseguem investigar propriedades e fazer conjecturas baseadas nos saberes da geometria.

A unidade temática Grandezas e Medidas, segundo Brasil (2018), promove:

> [...] o estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). (p. 273)

Por fim, Oliveira et al. (2022) explica que a unidade temática Probabilidade e Estatística engloba conceitos, dados e métodos aplicáveis em várias situações da vida cotidiana, da ciência e da tecnologia. Essa área é relevante para o aluno, pois possibilita "que ele aprenda a coletar, organizar, representar e interpretar dados nos mais variados contextos para, a partir deles, tomar decisões." (Oliveira et al., 2022)

Realizando uma reflexão entre as Unidades Temáticas da BNCC e o Projeto Novo Mais Educação (PNME), Oliveira et al. (2022) explica que

> [...] o PNME foi criado pela portaria MEC nº 1.144/2016 e regido pela Resolução FNDE nº 17/2017, com o objetivo de ser uma estratégia do Ministério da Educação em melhorar a aprendizagem em Língua Portuguesa e Matemática no ensino fundamental, por meio da ampliação da jornada escolar. (p. 2)

Olivera et al. (2022) também aponta que as escolas que adotam o PNME contam com a disponibilidade de jogos para o ensino da Matemática e verificou que dos dez jogos catalogados, 90% abrangem apenas a unidade temática Números. Porém, Oliveira et al. (2022) mostra que o Tangram, que é um quebra-cabeça formado de sete peças geométricas, triângulos, quadrado e paralelogramo. Pode ser utilizado para trabalhar conteúdos como área, frações, perímetro, portanto consegue englobar três unidades temáticas: Números, Geometria e Grandezas e Medidas. Isso mostra que há uma lacuna preocupante nos jogos sobre as outras temáticas não abordadas. Essa falta de materiais específicos pode impactar negativamente o aprendizado dos alunos.

Em contrapartida, Oliveira et al. (2022) explica que os jogos são ferramentas versáteis que desempenham um papel fundamental no contexto educacional e que

> [...] podem ser empregados em uma variedade de propósitos dentro do contexto de aprendizado. Um dos usos básicos muito importante é a possibilidade de construir-se a autoconfiança. Outro é o incremento da motivação. [...] um método eficaz que possibilita uma prática significativa daquilo que está sendo aprendido. Até mesmo o mais simplório dos jogos pode ser empregado para proporcionar informações factuais e praticar habilidades, conferindo destreza e competência. (Fernandes, 1995, p. ?).

Se pensarmos em como o uso de materiais manipulativos impactam no desenvolvimento de conceitos matemáticos, podemos trazer os apontamentos feitos por Grando (2015), que os considera como um recurso significativo para simular situações de resolução de problemas. Os autores observam que essa “ajuda manipulativa”, da maneira que tratam os recursos de manipulação, tem sido utilizado de forma limitada em especial para a aprendizagem inicial. Nesta interpretação, indicam por (Behr et al, apud Grando, 2015):

> [..] Os materiais manipulativos são um intermediário entre as situações-problema do mundo real e do mundo das ideias abstratas e os

> símbolos escritos. Eles representam os símbolos em que podem ser usados para representar algumas situações diferentes de mundo real, sendo que são concretos, no qual envolvem materiais reais (Behr et al., 1983, p.122).

Na investigação conduzida por Grando e coautores, as análises psicológicas evidenciam que a manipulação é um componente principal no desenvolvimento de sistemas representacionais, tornando as ideias mais significativas. Ainda, um material manipulativo é um tipo de mecanismo capaz de liberar o processo de pensamentos que corroboram um entendimento de uma situação particular em uma sequência de atividades. Dito de outra forma, recursos manipulativos acabam contribuindo para uma contínua reconstrução das situações impostas de um problema e, por consequência, acaba permitindo uma dinâmica de interações entre a resolução e as condições propostas pelo problema.

Concebemos que o uso de materiais manipulativos possibilita aos alunos uma visualização e uma possibilidade de representar as relações matemáticas. Utilizar-se desses jogos não se justifica apenas para motivar ou envolver os alunos, mas sim estimulá-los a estabelecer relações, observar padrões e regularidades e pensar de formar matemática. Ao utilizá-los como recurso para o ensino de matemática, dois caminhos podem ser seguidos: o professor pode optar em criar ou buscar um jogo já aplicado ou conhecido (por exemplo, Avançando com o Resto, Jogo da Memória, Baralho de Polinômios, entre outros.); ou o professor procura uma atividade que seja lúdica para seus estudantes, como jogos de entretenimento, desenvolvidos com o propósito específico mencionado ou mesmo jogos criados para entretenimento em uma cultura específica são alvos de uma ação intencional planejada. Essa ação visa explorar não apenas o aspecto lúdico, mas também a vertente matemática intrínseca ao jogo, proporcionando assim uma compreensão mais profunda da estratégia envolvida. A utilização desses conceitos quando tratamos dos jogos, seja na criação de atividades para abordar conteúdos em específico ou na busca de atividades lúdicas, é apresentada como uma estratégia para envolver os alunos e atribuir significado à aprendizagem matemática.

4. Cronograma

As datas e os conteúdos ministrados nos dez encontros do PROMAT estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 1 - Cronograma dos Encontros.

Encontro	Data	Conteúdos
1	16/09/2023	Fração, Razão e Proporção.
2	23/09/2023	Radiciação, Potenciação e Conjuntos numéricos.
3	30/09/2023	Equações do 1º e do 2º grau.
4	07/10/2023	Sistemas de Equações.
5	14/10/2023	Funções do 1º grau.
6	21/10/2023	Funções do 2º grau.
7	04/11/2023	Polinômios, produtos notáveis e fatoração algébrica.
8	11/11/2023	Geometria dos triângulos.
9	18/11/2023	Polígonos e Circunferências.
10	25/11/2023	Gincana: Tangram, Blackjack de polinômios, Torre de Hanói, Jogo de Dardos das Frações, Atividades das massas e sistemas, Desafio da cesta e equação do segundo grau, varal de frações e jogo dos quatro quatros.

5. Encontro 1

5.1 Plano de Aula

PROMAT: Encontro 1 – 16/09

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Fração, Razão e Proporção;

Professores: Alisson, Maíri, Michelli, Vitor;

Objetivo geral: Relembrar e retomar os conteúdos de fração, razão e proporção em situações do cotidiano e problemas matemáticos.

Objetivos específicos:

- Relembrar operações básicas com frações, como adição, subtração, multiplicação e divisão.
- Compreender o conceito de razão como uma comparação entre quantidades.
- Retomar o conceito de proporção e entender como elas são usadas em escalas e mapas.
- Relacionar os conceitos de fração, razão e proporção, percebendo como eles estão interconectados e podem ser aplicados conjuntamente.
- Promover a socialização entre os alunos.

Tempo de execução:

Um encontro de 4 aulas.

Recursos didáticos: Novelo de barbante, Jogo dorminhoco, slides, notebook, projetor, atividades impressas, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

1- Apresentação do curso PROMAT e dos estagiários (10 min):

Nesse momento, vamos dar boas-vindas aos alunos, comentando que o PROMAT é um Projeto de Ensino Institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática que procura atender alunos da rede pública de ensino. O PROMAT é dividido em duas partes, ambas com o objetivo de ensinar os alunos que buscam acesso aos cursos superiores. Na primeira parte, o foco de estudo será os conteúdos do Ensino Fundamental, e, na segunda parte, será os conteúdos do Ensino Médio. Também serão transmitidos alguns avisos e os conteúdos a serem trabalhados. Enquanto ocorre a apresentação, será passado uma folha para que os alunos coloquem seus contatos, possibilitando a criação de um grupo no WhatsApp.

2 - Dinâmica de apresentação dos alunos do PROMAT (30 min):

Afastaremos as carteiras e pediremos para os alunos formarem um círculo. Começaremos a dinâmica com um dos discentes pegando o barbante e enrolando-o (dando um nó) na ponta do dedo e falando seu nome, idade, onde mora, se trabalha ou não, e o que pretende cursar após o Ensino Médio. Após, joga o novelo para outro discente (para os alunos entenderem bem a dinâmica), o outro discente também amarra o barbante no dedo ou na mão e se apresenta falando as mesmas informações e escolhe alguém aleatoriamente para jogar o novelo, e assim será feito sucessivamente até que todos se apresentem e estejam conectados ao barbante, formando uma teia. Quanto o último se apresentar, fazemos o processo contrário, para o novelo ir retornando e desfazendo a trama, mas antes da pessoa jogar o novelo de volta, ela precisa apresentar seu colega em que está conectado. Esta parte é interessante, uma vez que nem todos se recordam detalhadamente das informações, o que estimula a interação entre eles. Ao encerrar a dinâmica, dizemos que isso serviu para nos conhecer melhor e demonstrar que ao longo do curso estaremos conectados, se ajudando mutuamente e aprendendo uns com os outros.

3 - Atividade Introdutória sobre fração (20 min):

Nesse momento, iremos separar os alunos em grupo. Para fazer isso, será entregue um cartão para cada aluno. Nesses cartões estarão representadas várias quantidades numéricas, por meio de frações, textos e imagens. Os grupos serão formados pelos alunos que tiverem cartões com frações equivalentes. Iremos separá-los em quatro ou cinco grupos, dependendo da quantidade de alunos.

Em seguida, entregaremos para cada aluno um exercício sobre frações e pediremos para eles resolverem em grupo. Através dessa atividade, avaliaremos os conhecimentos prévios dos alunos.

Questão:

(VUNESP 2011- adaptada) Um antigo problema hindu afirma: “De uma quantidade de puras flores de lótus, uma terça parte, um quinto e um sexto foram oferecidas aos deuses Shiva, Vishnu e Sol. Um quarto da quantidade original foi ofertada a Bhavani. Os seis lótus restantes foram dados ao venerável Preceptor”. Qual a quantidade total de flores.

Possível solução:

Total de flores: x

Deus Shiva: $\frac{1}{3}x$

Deus Vishnu: $\frac{1}{5}x$

Deus Sol: $\frac{1}{6}x$

Deus Bhavani: $\frac{1}{4}x$

Deus Preceptor: 6

Dessa forma temos:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + 6 = x$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x - x = -6$$

(aplicamos o m.m.c.)

$$\frac{20x + 12x + 10x + 15x - 60x}{60} = -6$$

$$\frac{-3x}{60} = \frac{-6}{1}$$

(produto dos meios pelos extremos)

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-360}{-3} = x = 120\ flores.$$

(dividimos ambos os lados da equação por (-3) para equilibrar).

4 - Definição de fração (15 min):

Daremos continuação na aula apresentando a definição de fração através de um slide.

Tabela 2 - Definição de Fração.

Definição de Fração
Fração é um número que representa uma quantidade de algo. O conjunto numérico no qual as frações estão contidas é chamado de conjuntos dos números racionais e toda fração é expressa na forma $\frac{a}{b}$ com $a,\ b\ \in\ \mathbb{Z}$ onde “a” é o numerador e “b” é o denominador, este último é diferente de zero.

*Também definiremos as operações com fração.

Tabela 3 - Definição de Frações Equivalentes.

Frações Equivalentes
Duas frações que têm a mesma forma irredutível são equivalentes. Ou seja, representam a mesma parte de um todo.

*Por exemplo as frações $\frac{3}{12}$ e $\frac{5}{20}$ são equivalentes, pois

$$\frac{3^{(:3)}}{12^{(:3)}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5^{(:5)}}{20^{(:5)}} = \frac{1}{4}$$

Tabela 4 - Adição e Subtração de Frações

Adição e Subtração de Frações
A adição e subtração de frações com denominadores iguais é uma fração cujo denominador é igual ao das parcelas e o numerador é o resultado da mesma operação entre os numeradores. Já para somar e subtrair frações com denominadores diferentes, é preciso transformá-las em frações com o mesmo denominador.

*Exemplo: Quando os denominadores são iguais, temos:

$\frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$.

Quando são diferentes, primeiro devemos transformá-los em frações de mesmo denominador. Para isso, podemos utilizar das frações equivalentes. Uma forma de fazer isso é multiplicando e dividindo cada fração pelo denominador da outra, da seguinte forma:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}*\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{3}*\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{9}{6}+\frac{2}{6}=\frac{11}{6}$$

Tabela 5 - Multiplicação de Frações.

Multiplicação de Frações
A multiplicação de duas frações é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e o denominador é o produto dos denominadores.

*A seguinte operação é realizada dessa forma:

$$\frac{1}{2}*\frac{2}{3}=\frac{1*2}{2*3}=\frac{2}{6}$$

Tabela 6 - Divisão de Frações.

Divisão de Frações
A divisão de uma fração por outra é igual ao produto da primeira fração pelo inverso da segunda

Para dividirmos a fração $\frac{2}{5}$ pela fração $\frac{3}{2}$, devemos fazer assim:

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{2}=\frac{2}{5}*\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

5 - Atividades para resolução de frações (25 min):

1) Uma organização não governamental possui estoque suficiente para servir refeições para uma população de 750 moradores de rua durante 25 dias. Devido a um desastre natural, mais 500 pessoas necessitam de ajuda para se alimentar. Se a quantidade de alimento permanecer a mesma, esse estoque durará por:

a) 14 dias

b) 15 dias

c) 16 dias

d) 18 dias

e) 20 dias

Resolução: Podemos usar proporção ou regra de três. A comida dura 25 dias para 750 moradores. Ao chegar mais 500 moradores, teremos ao total 1250 moradores. Sendo assim a comida irá durar menos dias. Realizando a regra de três, temos que $\frac{750 \cdot 25}{1250} = x\, dias$, disso temos que $\frac{18750}{1250} = 15\, dias$.

2) Mário preencheu 3/4 de uma jarra de 500 ml com refresco. Na hora de servir a bebida, ele distribuiu o líquido igualmente em 5 copos de 50 ml, ocupando 2/4 da capacidade de cada um. Com base nestes dados responda: que fração de líquido restou na jarra?

Resolução: Para resolver esse problema podemos realizar esses passos:

O 1º passo é calcular a quantidade de refresco na jarra,

$$\frac{3}{4} * 500ml = \frac{3 * 500ml}{4} = \frac{1500ml}{4} = 375ml$$

Depois para o 2º passo podemos calcular a quantidade de refresco nos copos,

$$\frac{2}{4} * 50ml = \frac{1}{2} * 50ml = \frac{50ml}{2} = 25ml$$

Como são 5 copos,

$$25ml * 5 = 125ml$$

Agora podemos calcular quanto líquido sobrou na jarra,

$$375ml - 125ml = 250ml$$

Como o exercício pede a fração restante na jarra, precisamos descobrir quanto 250ml representa do total da jarra. Uma forma de fazer isso é da seguinte forma:

$$\frac{líquidorestante}{capacidadetotal} = \frac{250}{500}$$

Simplificando temos,

$$\frac{250^{(:250)}}{500^{(:250)}} = \frac{1}{2}$$

Então a fração de líquido restante na jarra é de $\frac{1}{2}$.

3) (Enem 2021 – Adaptado) Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios. Qual é a fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir?

Resolução: Sabemos que o capital da empresa foi divido em 16 partes,

$$4+6+6=16$$

E essas 16 partes devem ser divididas igualmente entre os 3 sócios, mas como $16:3$ não é uma divisão exata, podemos multiplicar ambos os lados da igualdade por 3:

$$3(4+6+6)=3*16$$

$$3*4+3*6+3*6=48$$

$$12+18+18=48$$

Então agora dividindo 48 por 3,

$$48:3=16$$

Dessa forma, temos uma empresa dividida em 48 partes iguais, em que cada sócio deve receber 16, como Antônio possui 12 partes das 48, precisa de mais 4 partes para ficar com 16, e os outros dois sócios, que possuem 18 partes cada um, devem abrir mão de 2 partes cada um para passar para Antônio.

Então, para descobrir a fração que cada sócio está passando para Antônio, podemos fazer $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$.

Então Antônio está adquirindo $\frac{1}{9}$ das partes de cada sócio.

Intervalo: (20 min)

6- Comentar sobre razão e proporção (10 min):

Ao retornar do intervalo, questionaremos os alunos sobre: O que é razão e proporção? Qual a relação disso com fração?

Esperamos que eles possam fazer uma relação direta com os exercícios passados antes do intervalo, e deixaremos eles dizerem o que pensam. Caso exista confusão sobre isso, explicaremos que os exercícios resolvidos anteriormente se tratava também de razão e proporção. Caso seja necessário podemos retomar um exemplo e resolvê-lo novamente.

7° Definição de razão e proporção (15 min):

Em seguida, vamos passar as definições de razão e proporção em um slide.

Tabela 7 - Definição de Razão.

Definição de Razão

A razão estabelece uma comparação entre duas grandezas, e esse conceito está ligado com o conceito de divisão. Dizemos que a razão entre os números a e b, é o quociente entre a e b, ou seja, a ÷ b ou $\frac{a}{b}$. Para representar uma razão entre dois números de maneira correta, devemos montar a fração na ordem que são apresentados os dados.

Tabela 8 - Definição de Proporção.

Definição de Proporção
Proporção é a igualdade entre duas razões ou mais, então, essas razões assumem o mesmo valor. Representamos a proporção entre duas razões da seguinte forma: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sendo a e d os chamados extremos (externos) e b e c os meios (internos). A proporção obedece à propriedade "O produto dos externos é igual ao produto dos meios", ou seja, a*d = b*c. Através dessa propriedade no cálculo de proporções, quando temos três valores conhecidos e precisamos encontrar um quarto, realizamos a multiplicação cruzada. Por esse motivo, o cálculo de proporções é chamado de regra de três.

8- Atividades sobre razão e proporção (15 min):

1) Em uma granja, o frango passa por várias etapas, e em cada uma delas a quantidade de comida que ele recebe é diferente. Sabendo-se que o crescimento de um frango leva 40 dias e que são utilizados 8 610 kg para alimentar 12 300 frangos nesse período. Ainda nesse mesmo prazo, qual seria a quantidade de ração necessária para alimentar 20 000 frangos?

a) 20000 kg

b) 17000 kg

c) 16000 kg

d) 15000 kg

e) 14000 kg

Resolução: O período proposto é de 40 dias, sendo entregue 8610 Kg de ração para 12300 frangos, e queremos descobrir a quantidade de quilogramas de ração necessária para alimentar 20000 frangos. Podemos resolver por meio da regra de três, já que conhecemos três valores e precisamos encontrar um quarto.

$$Kg\ de\ racão\ quantidade\ de\ frangos$$

$$8610 - - - - - - - - 12300$$
$$x - - - - - - - - 20000$$

$$12300x = 172200000$$
$$12300x \div 100 = 172200000 \div 100$$
$$123x = 1722000$$
$$x = 14000$$

Logo, vai ser distribuído 14.000 Kg de ração que corresponde a alternativa e).

2) (ENEM – 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos.
b) 360 tijolos.
c) 400 tijolos.
d) 480 tijolos.
e) 600 tijolos.

Resolução: É preciso notar que existe uma razão entre a quantidade de telhas e a quantidade de tijolos, sendo 1500 e 1200. Sabemos que 900 telhas já foram carregadas nesse caminhão, do total permitido, 1500. Podemos carregar ainda 1500 − 900 = 600 telhas. Vamos encontrar o equivalente a essa quantidade de telhas em tijolos, através da proporção.

$$Telhas\ Tijolos$$
$$1500 - - - - 1200$$
$$600 - - - - x$$

$$1500x = 1200 * 600$$

$$1500x = 720000$$

$$x = \frac{720000}{1500}$$

$$x = 480.$$

Logo, ele pode colocar em seu caminhão a quantidade de 480 tijolos, alternativa d).

3) Um automóvel desloca-se a 60 km/h e demora 5 horas para chegar a seu destino. Se o mesmo automóvel se desloca ao longo desse percurso a 100 km/h, quanto tempo levaria para completar esse mesmo percurso?

Resolução: Sabemos que o carro pode percorrer uma 60 Km a cada hora, e que ele precisa de 5 horas para chegar no destino seguindo nessa velocidade. Podemos notar a presença das razões entre km e horas e de km/h e horas de percurso. Vamos precisar trabalhar apenas com o segundo caso.

$$Km\ por\ hora \qquad\qquad Tempo\ de\ chegada\text{(h)}$$

$$60 - - - - - - - - - x$$

$$100 - - - - - - - - 5$$

$$100x = 60 * 5$$

$$100x = 300$$

$$x = 3$$

Logo, o tempo para chegada ao destino será de 3 horas.

9- Jogo Dorminhoco (40 min):

Neste jogo, cada grupo deve conter até 6 integrantes. Cada um recebe 4 cartas. E, nessas cartas, estão contidas frações diferenciadas e representações geométricas de frações. Existem frações que são equivalentes, e uma carta coringa que todos devem segurá-la por uma rodada para passar para frente posteriormente. O objetivo é um jogador formar, dentre as 4 cartas na mão uma correspondência que seja equivalente e válida. Porém, ele não comunica sua possível vitória, mas abaixa silenciosamente suas cartas na mesa. Esperamos que os colegas notem e abaixem suas cartas silenciosamente também. O último a notar, perderá o jogo e será considerado o dorminhoco. Os discentes conferem as cartas para ver se está correto. Se não estiver, considera-se que o vencedor bateu furado e reinicia-se o jogo. Explicaremos o processo do jogo antes de aplicá-lo. Podemos fazer duas rodadas.

10 - Finalização (10 min):

Motivaremos os alunos a persistirem no curso até o final, agradecendo a sua presença. Forneceremos aos alunos uma folha com atividades relacionadas à aula para serem feitas em casa, e faremos a correção no sábado seguinte.

Atividades:

1) (ESAF/CGU/2001) Achar uma fração equivalente a $\frac{7}{8}$ cuja soma dos termos é 120.

A. $\frac{52}{68}$

B. $\frac{54}{66}$

C. $\frac{56}{64}$

D. $\frac{58}{62}$

E. $\frac{60}{60}$

Resolução:

Temos que:

$$\frac{7}{8} = \frac{7K}{8K}$$

$$7K + 8K = 120$$

$$15K = 120$$

$$K = \frac{120}{15} \longrightarrow K = 8$$

Então,

$$\frac{7.8}{8.8} = \frac{56}{64}.$$

Resposta: c.

2) (ENEM-2013) Para se construir um contrapiso, é comum na constituição do concreto, se utiliza cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m³ de concreto. Qual é o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a. 1,75
b. 2,00
c. 2,33
d. 4,00
e. 8,00

Resolução:

Temos então: $\frac{1}{7}$ parte de cimento, $\frac{4}{7}$ parte de areia, $\frac{2}{7}$ parte de brita;

Percebe-se que ao somar as partes, obtemos $\frac{7}{7}$, que é o todo das partes, ou seja, 1 m³.

Como é pedido o volume de cimento de uma receita com 14 m³, e sabemos que para 1 m³ de receita, utiliza-se $\frac{1}{7}$ parte de cimento, basta multiplicar a parte de cimento pelos 14m³ que se pede:

$\frac{1}{7} * 14 = \frac{14}{7} = 2$ m³. Então, se para 1 m³ de receita de concreto utiliza-se $\frac{1}{7}$ parte de cimento, para 14 m³ de receita usa-se 2m³ de cimento. Podemos resolver por uma regra de três:

$$\frac{\frac{1}{7}}{x} = \frac{1}{14}$$

$$\rightarrow x.1 = 14.\frac{1}{7}$$

$$\rightarrow x = \frac{14}{7}$$

$$\rightarrow x = 2 \text{ m}^3$$

Resposta é a alternativa b) 2,00.

3) (ENEM-2016) O governo de um estado irá priorizar investimentos financeiros, na área de saúde, em uma das cinco cidades apresentadas na tabela.

Tabela 9 - Exercício do ENEM 2016.

Cidade	Número total de habitantes	Número total de médicos
M	136000	340
X	418000	2650
Y	210000	930
Z	530000	1983
W	108000	300
Total	1402000	6203

A cidade a ser contemplada será aquela que apresentar a maior razão entre o número de habitantes e a quantidade de médicos. Qual dessas cidades deverá ser contemplada?

a) M

b) X

c) Y

d) Z

e) W

Possível solução:

Pede-se a razão entre o número de habitantes e a quantidade de médicos das cidades.

Razão da cidade = $\frac{número\ de\ habitantes}{Quantidade\ de\ médicos}$

Dessa forma, calculamos a razão das cidades segundo as informações da tabela.

Razão da cidade M = $\frac{136000}{340}$ = 400.

Razão da cidade X = $\frac{418000}{2650}$ = 157,73.

Razão da cidade Y = $\frac{210000}{930}$ = 225,80.

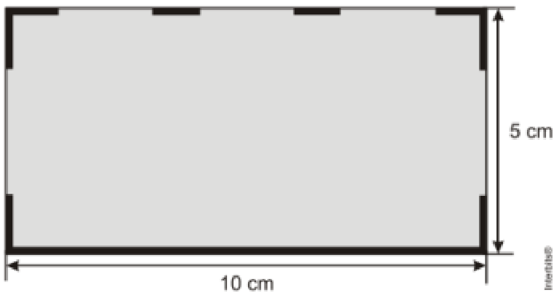
Razão da cidade Z = $\frac{530000}{1983}$ = 267,27.

Razão da cidade W = $\frac{108000}{300}$ = 360.

Observando as razões encontradas temos que a maior razão entre o número de habitantes e a quantidade de médicos é a cidade M, alternativa letra a.

4) (UNESP 2015) Para divulgar a venda de um galpão retangular de 5.000 m², uma imobiliária elaborou um anúncio em que constava a planta simplificada do galpão, em escala, conforme mostra a figura:

Figura 1 - Atividade de vestibular UNESP 2015.



O maior lado do galpão mede, em metros.

a) 200.

b) 25.

c) 50.

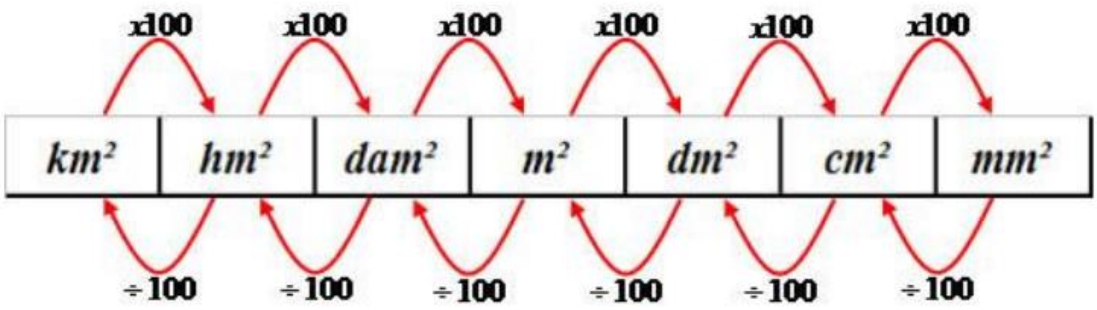
d) 80.

e) 100.

Possível solução: Temos que a área da planta do desenho do anúncio é 10cm de comprimento e 5cm de largura, totalizando 50 cm². Devemos ter cuidado pois a escala do desenho está em centímetros e a escala real do galpão está em metros, então vamos converter na mesma unidade de medida.

Convertendo metros ao quadrado em centímetros quadrados temos:

Figura 2 - Conversão de escalas.



5000 m²= 5000.100.100

5000 m² = 50.000.000 cm²

Temos que a escala é a razão da área do desenho e a área real.

Escala² = $\frac{área\ do\ desenho}{área\ real}$ (a escala é elevada ao quadrado pois trata-se de área)

Escala² = $\frac{50}{50.000.000}$ (divide-se em cima e embaixo por 50)

Escala² = $\frac{1}{1.000.000}$ (aplicamos a raiz dos dois lados).

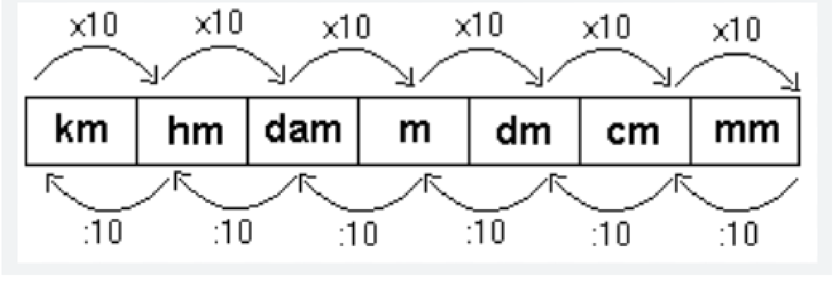
Escala = $\sqrt{\frac{1}{1.000.000}}$

Escala = $\frac{1}{1.000}$

A escala é de 1 para 1000, ou seja, uma unidade do desenho é mil vezes maior no real.

Como é pedido a medida do maior lado do desenho no galpão, o maior lado é 10.

Figura 3 - Conversão de escalas.



Então basta multiplicar a 10 pelo 1000. Obtém 10000 cm, convertendo em metros basta dividir o 10000 por 100, obtendo 100 metros de comprimento o galpão.

Slides

Figura 4 - Slides utilizados em aula.

5.2 Material entregue aos alunos

Figura 5 - Material entregue aos alunos.

PROMAT

Frações

- **Questão**

(VUNESP 2011- adaptada) Um antigo problema hindu afirma: "De uma quantidade de puras flores de lótus, uma terça parte, um quinto e um sexto foram oferecidas aos deuses Shiva, Vishnu e Sol. Um quarto da quantidade original foi ofertada a Bhavani. Os seis lótus restantes foram dados ao venerável preceptor". Qual a quantidade total de flores?

- **Definição de fração:**

- **Frações Equivalentes:**

- **Adição e Subtração de Frações:**

- **Multiplicação de Frações:**

- **Divisão de Frações:**

- **Atividades**

1) Uma organização não governamental possui estoque suficiente para servir refeições para uma população de 750 moradores de rua durante 25 dias. Devido a um desastre natural, 500 pessoas necessitam de ajuda para se alimentar. Se a quantidade de alimento permanecer a mesma, esse estoque durará por:

2) Mário preencheu 3/4 de uma jarra de 500 ml com refresco. Na hora de servir a bebida, ele distribuiu o líquido igualmente em 5 copos de 50 ml, ocupando 2/4 da capacidade de cada um. Com base nestes dados responda: que fração de líquido restou na jarra?

3) (Enem 2021 – Adaptado) Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a: 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios. Qual é a fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir?

Razão e Proporção

- **Definição da Razão:**

- **Definição da Proporção:**

- **Atividades**

1) Em uma granja, o frango passa por várias etapas, e em cada uma delas a quantidade de comida que ele recebe é diferente. Sabendo-se que o crescimento de um frango leva 40 dias e que são utilizados 8 610 kg para alimentar 12 300 frangos nesse período. Ainda nesse mesmo prazo, qual seria a quantidade de ração necessária para alimentar 20 000 frangos?

2) (ENEM – 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras e o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

3) Um automóvel desloca-se a 60 km/h e demora 5 horas para chegar a seu destino. Se o mesmo automóvel se desloca ao longo desse percurso a 100 km/h, quanto tempo levaria para completar esse mesmo percurso?

PROMAT 5

Atividades de revisão

1) (ESAF/CGU/2001) Achar uma fração equivalente a $\frac{7}{8}$ cuja soma dos termos é 120.

2) (ENEM-2013) Para se construir um contrapiso, é comum na constituição do concreto, se utiliza cimento, areia e brita, na seguinte proporção 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto. Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

3) (ENEM-2016) O governo de um estado irá priorizar investimentos financeiros, na área de saúde, em uma das cinco cidades apresentadas na tabela.

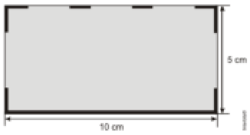
Cidade	Número total de habitantes	Número total de médicos
M	136000	340
X	418000	2650
Y	210000	930
Z	530000	1983
W	108000	300
Total	1402000	6203

A cidade a ser contemplada será aquela que apresentar a maior razão entre o número de habitantes e a quantidade de médicos. Qual dessas cidades deverá ser contemplada?

4) (UNESP 2015) Para divulgar a venda de um galpão retangular de 5.000 m^2, uma imo-

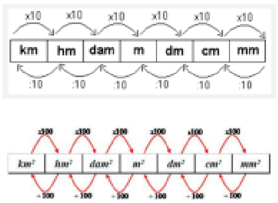
PROMAT 6

biliária elaborou um anúncio em que constava a planta simplificada do galpão, em escala, conforme mostra a figura:



O maior lado do galpão mede, em metros.

Conversão das escalas



5.3 Relatório

1º ENCONTRO (16/09/2023)

Sala A209

Grupo de estagiários: Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 16 de setembro de 2023, iniciou-se o primeiro dos dez encontros do PROMAT que seriam ministrados pelos membros desse grupo de estagiários. Inicialmente começamos nos apresentando e explicando um pouco sobre o intuito e os objetivos desse projeto. Após as apresentações, enquanto se passava a lista de chamada aos alunos, pedimos para que colocassem seus números de telefone para manter o contato e esclarecer as dúvidas através do WhatsApp. Durante esse tempo em que a lista passava, nós realizamos no quadro o tradicional jogo da forca (constituído de adivinhar uma palavra de acordo com o tema, sendo descoberta letra por letra até que se forme a palavra que se deseja descobrir). Tal jogo vem com a intenção de descontrair os alunos até que todos assinassem a chamada. Em seguida, tomamos a atenção dos alunos para explicar a primeira dinâmica que se iniciaria, nomeada de trama de fios, elaborada para trazer interação entre todos as pessoas presentes, utilizando-se de um novelo de lã. Esta atividade inicia-se com uma primeira pessoa em posse do novelo se apresentar e segurar a ponta do fio, em seguida, ela entrega para o próximo colega de uma forma aleatória, onde quem recebeu segura uma parte do fio, se apresenta e passa o novelo para o próximo e, desta forma, iniciou-se a trama de fios. Quando a última pessoa foi apresentada, para desatarmos os nós, teríamos que realizar o processo contrário e apresentar o colega que havia se apresentado antes de você. Dessa maneira prosseguiu-se a brincadeira, na qual percebemos que foi bem recebida por todos.

Assim que a dinâmica inicial foi finalizada, nós separamos os vinte e nove estudantes em grupos, por meio de frações equivalentes que foram entregues assim que entraram em sala. Tais frações possuíam suas representações geométricas e algébricas. Após pequenas discussões para encontrar e formalizar as equivalências, a sala ficou separada em quartetos e quintetos, tendo o propósito de haver uma troca de informações entres aqueles discentes que foram designados a tais grupos, com finalidade de resolver as questões em conjunto. Com isso, engrenamos com o problema das flores de lotus para identificarmos e observamos os níveis de conhecimentos que nossos alunos possuíam dando um tempo para que realizassem a atividade. Enquanto transitávamos entres os grupos, notamos a dificuldade dos alunos em identificar a parte-todo e de determinar o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) dos quais. A questão proposta necessitava destes conhecimentos breves para que fosse encontrada a solução esperada. Resolvemos a atividade no quadro de maneira detalhada e esclarecedora.

Sanadas as dúvidas pertinentes, iniciamos com o conteúdo de frações e suas definições. Em seguida, abordamos as respectivas definições de razão e proporção, para que assim, pudéssemos propor as atividades que seriam realizadas com enfoque em reforçar os conceitos que já haviam sido explicados. Havia seis questões a serem propostas e como extrapolamos uma parte do tempo com a primeira atividade que foi comentada, aproveitamos a coincidência de que havíamos seis grupos em sala de aula, para cada agrupamento de alunos resolver uma questão. Quando os grupos terminaram a atividade, um representante de cada grupo foi ao quadro para expor a solução que haviam encontrado após comentários e breves discussões. Para encerrarmos a aula trouxemos uma segunda dinâmica com o foco em retomar as frações equivalentes. Essa dinâmica envolveu o jogo conhecido como dorminhoco (de frações próprias), o qual tem como objetivo identificar equivalências entre as frações que são representadas por meio da linguagem natural, forma algébrica e geométrica. Tal brincadeira foi bem recebida pelos alunos e percebemos que ela trouxe resultados satisfatórios, pois eles compreenderam o conceito de frações e equivalência.

6. Encontro 2

6.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 2 – 23/09

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Radiciação, Potenciação e Conjuntos Numéricos.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli, Vitor.

Objetivo geral: Revisar as definições e propriedades da radiciação, potenciação e estudar a noção de conjunto e suas operações.

Objetivos específicos:

- Relembrar as definições e propriedades da radiciação e da potenciação;
- Efetuar cálculos com potências e raiz;
- Compreender os conjuntos numéricos e suas operações;
- Trabalhar atividades que utilizem potenciação, radiciação e os conjuntos numéricos;
- Aprender a utilizar o diagrama de Venn.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, livro didático, lápis, borracha, caderno, notebook, projetor.

Encaminhamento metodológico:

1- Correção das tarefas do encontro anterior (15 min).

2- Introdução de Conjuntos (5 min).

Iremos apresentar este slide aos alunos. A partir de observações feitas, relacionaremos com conjuntos e o diagrama de Venn.

3- Tipos de Conjuntos e Relações (10 min).

Conjunto vazio: não possui elemento, representado por $A = \{\ \}$ ou $A = \emptyset$.

Conjuntos unitários: possui um único elemento, exemplo, $D = \{1\}$.

Conjunto universo: é aquele considerado para estudar determinada situação, por exemplo, para estudar a faixa salarial de empregados, precisamos conhecer o universo pesquisado $U = \{funcionarios\ da\ empresa\}$.

Conjuntos finitos: apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplos: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{Meses\ do\ ano\}$, $C = \{Vogais\ no\ alfabeto\}$.

Conjuntos infinitos: apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo: $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots ,100, \dots\}$.

Relação de pertinência:

Usamos o símbolo $\in$ para dizer que um elemento pertence a um conjunto, e $\notin$ para indicar que o elemento não pertence a um conjunto.

Exemplo: $2 \in \{1,2,3,4\}$, mas $5 \notin \{1,2,3,4\}$.

Dizemos que A é um subconjunto de B, se todos os elementos de A pertencem também a B. Com os subconjuntos vem a relação de inclusão entre conjuntos.

Relação de inclusão:

Usamos o símbolo $\subset$ para dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, $A \subset B$, significa que todos os elementos do conjunto A também são elementos do conjunto B. Já o símbolo $\supset$ indica que um conjunto contém outro, ou seja, $A \supset B$ indica que A contém todos os elementos de B.

Exemplo: $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $A = \{Meses\ com\ 30\ dias\}$, temos que $B \supset A$ e $A \subset B$.

4- Diagrama de Venn (5 min).

Figura 6 - Algumas informações sobre John Venn.

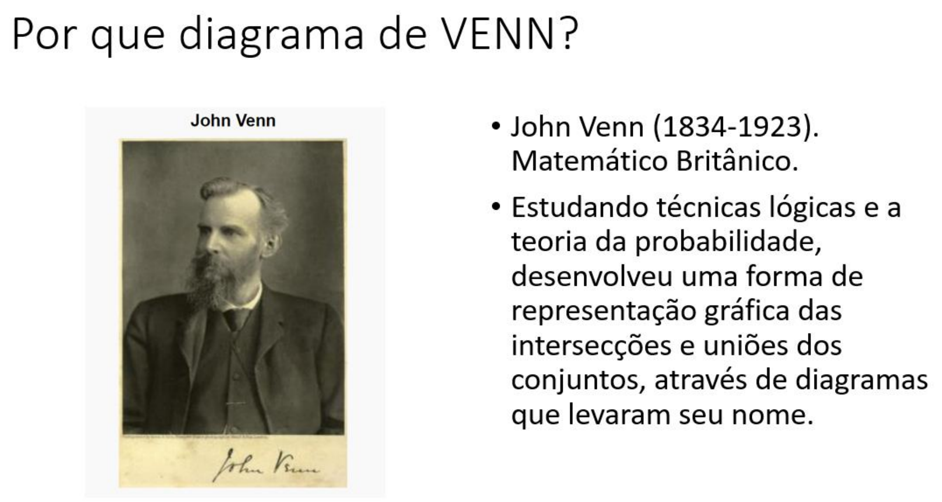
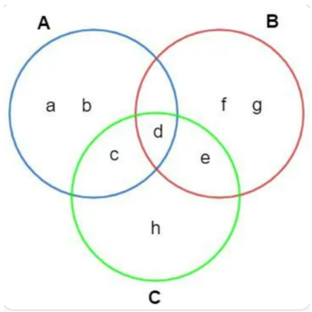


Figura 7 - O que é o diagrama de Venn.

O que é o diagrama de Venn?



- É uma maneira de apresentar graficamente os conjuntos. Nele construímos uma linha fechada, inserindo em seu interior os elementos.
- A ideia é facilitar o entendimento nas operações básicas de conjuntos como; Relação inclusão e pertinência, união e intersecção, diferença e conjunto complementar.

5- Operações com conjuntos (10 min):

União de conjuntos:

Usando o símbolo ∪, dizemos que $A \cup B$, representa a união dos elementos do conjunto A com os elementos do conjunto B.

Exemplos usando elementos numéricos:

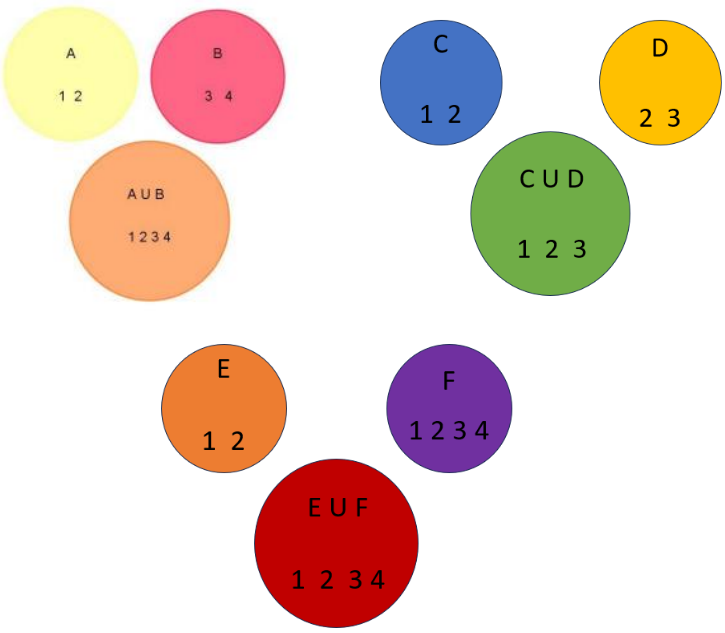
A = {1,2} e B = {3,4}, $A \cup B$ = {1,2,3,4}.

C = {1,2} e D = {2,3}, $\mathrm{C} \cup \mathrm{D}$ = {1,2,3}.

E = {1,2} e F = {1,2,3,4}, $E \cup F$ = {1,2,3,4}.

Usando o diagrama de Venn:

Figura 8 - Exemplos utilizando o diagrama de Venn.



Interseção de conjuntos:

Usando o símbolo ∩, dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B. Exemplos usando números:

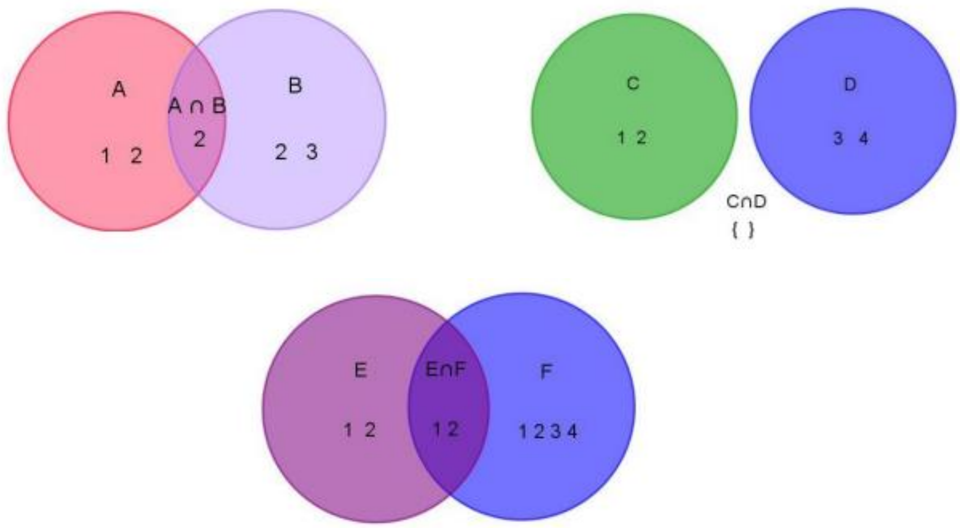
A = {1,2} e B = {2,3}, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ = {2}.

C = {1,2} e D = {3,4}, $\mathrm{C} \cap \mathrm{D}$ = { }.

E = {1,2} e F = {1,2,3,4}, $E \cap F$ = {1,2}.

Usando desenhos:

Figura 9 - Exemplos utilizando o diagrama de Venn.



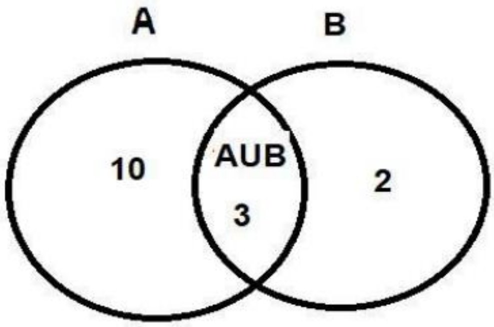
6- Exercícios Conjuntos (30 min):

1-(PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A, qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

Possível solução:

Na nossa pesquisa, não há pessoas que não utilizam os dois produtos. Se 10 pessoas não utilizam B é porque elas utilizam somente A. Se duas pessoas não utilizam A é porque utilizam o produto B.

Figura 10 - Solução do exercício da (PUC-Rio-2005).



Logo, só sobraram três pessoas que devem utilizar A e B.

2-(ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

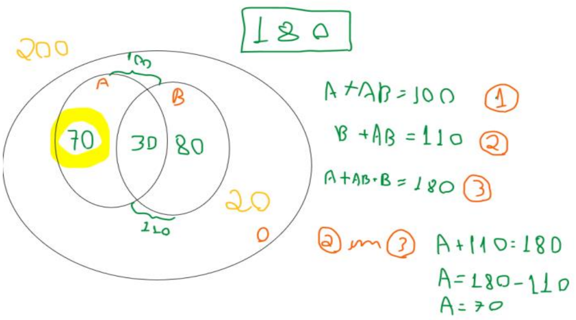
- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a?

Solução:

Figura 11 - Solução do exercício do grupo sanguíneo (ENEM 2020).



6- Conjuntos Numéricos (10 min):

Conjuntos dos Números Naturais $(\mathbb{N})$**:**

Chamamos de conjunto dos números naturais $(\mathbb{N})$ o seguinte conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}.$$

E chamamos de $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos:

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}.$$

Nesse conjunto, podemos definir duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação.

Conjunto dos Números Inteiros $(\mathbb{Z})$**:**

Chamamos de conjunto dos números inteiros $(\mathbb{Z})$ o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

Nesse conjunto, temos três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots,-3,-2,-1,1,2,3,\ldots\},$$

os interos não nulos;

$$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N},$$

o conjuntos dos inteiros não negativos.

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots,-3,-2-1,0\},$$

os inteiros não positivos.

No conjunto dos números inteiros podemos definir além das operações dos naturais, a operação de subtração.

Observe que todo número natural é inteiro, por isso escrevemos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Lê-se: "$\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$".

Conjnuntos dos Números Racionais $(\mathbb{Q})$**:**

O conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q})$ é composto pelos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. O conjunto dos racionais também possui três subconjuntos: racionais não nulos, racionais não negativos e não positivos, respectivamente $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{Q}_-$.

E no conjunto dos números racionais podemos definir a operação de divisão, além das demais operações.

Representação decimal: Note que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Nessa passagem podem ocorrer dois casos:

1º- O número decimal tem uma quantiade finita de algarismos, uma decimal exata. Por exemplo:

$$\frac{3}{1} = 3; \frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{20} = 0{,}05; \frac{27}{1000} = 0{,}027$$

2º- O número decimal tem uma quantidade infinita da algarismos que se repetem periodicamente, uma dízima periódica. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{11}{6} = 1{,}8333 \ldots = 1{,}8\overline{3}$$

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714 \ldots = 0{,}\overline{285714}$$

Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)**:**

Números cuja representação decimal possuem infinitas casas decimais não periódicas, são chamados de irracionais. Por exemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots$$

$$\pi = 3{,}14159 \ldots$$

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$):

É o conjunto formado por todos os números com representação decimal, ou seja, decimais exatas ou periódicas e as decimais não exatas e periódicas, ou seja, os conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e também $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$**.**

7- Exercícios de Conjuntos Numéricos (15 min):

Resolveremos o primeiro exemplo no quadro e o segundo ficará como tarefa, para ser resolvido no início da próxima aula.

1) Sobre conjuntos numéricos, são feitas as seguintes afirmações:

a- Todo número inteiro é natural;

b- Todo número natural é racional;

c- Todo número real é irracional;

d- Todo número racional é natural;

e- Todo número natural é inteiro.

Qual(is) dessas afirmações é (são) verdadeira(s)?

Solução:

a) falso.

b) verdadeira.

c) verdadeira.

d) falsa.

e) verdadeira.

2) Use ∈ ou ∉ nas lacunas:

a) 2______$\mathbb{N}$ f) $\sqrt{9}$________$\mathbb{Z}$

b) -5 ______$\mathbb{Z}$ g) $\sqrt[3]{8}$________$\mathbb{Q}$

c) -21_______$\mathbb{Q}$ h) $0,55555\ldots$ ________$\mathbb{Q}$

d) 0,56 _______$\mathbb{R}$ i) $-\sqrt{6}$ ________$\mathbb{Q}$

e) $-\frac{1}{4}$ _______$\mathbb{N}$ j) $\sqrt{a^2}$_______$\mathbb{Z}$, sendo a ∈ $\mathbb{N}$.

Solução:

a) pertence f) pertence

b) pertence g) pertence

c) pertence h) pertence

d) pertence i) não pertence

e) não pertence J) pertence

3) Calculando-se $\sqrt{30}$, obtém-se 5,4772255..., número que tem representação decimal infinita, mas não é dizima periódica. Conclui-se então que √30 é um número:

Solução: irracional.

4) Sobre os conjuntos numéricos, marque a alternativa incorreta.

a) Todo número natural é também um número racional.

b) Um número racional não pode ser irracional.

c) Todo número negativo é um número inteiro.

d) O conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais.

e) As dízimas periódicas são consideradas números racionais, portanto são também números reais.

Solução:

a) Correta, pois o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números racionais.

b) Correta, um número racional não pode ser irracional, pois a intersecção entre esses conjuntos é vazia.

c) Incorreta, pois, por mais que o conjunto dos números inteiros seja o acréscimo dos números negativos, vale ressaltar que números decimais negativos não são inteiros, como – 2,5, ou até mesmo números irracionais, como o - π.

d) Correta, pois essa é a definição dos números reais.

e) Correta, pois as dízimas periódicas podem ser representadas por frações, logo são racionais, e todo número racional é também um número real.

5) Em relação aos principais conjuntos numéricos, identifique as sentenças verdadeiras.

a) ( ) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.

b) ( ) Todo número natural é inteiro.

c) ( ) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.

d) ( ) Todo número racional é inteiro.

e) ( ) O número zero é real, inteiro e racional.

Solução:

a) Falso

b) Verdadeiro

c) Falso

d) Falso

e) Falso

6) Sobre os conjuntos numéricos, marque a alternativa incorreta.

a) Todo número natural é também um número racional.

b) Um número racional não pode ser irracional.

c) Todo número negativo é um número inteiro.

d) O conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais.

e) As dízimas periódicas são consideradas números racionais, portanto são também números reais.

Solução: Alternativa c)

a) Correta, pois o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números racionais.

b) Correta, um número racional não pode ser irracional, pois a intersecção entre esses conjuntos é vazia.

c) Incorreta, pois, por mais que o conjunto dos números inteiros seja o acréscimo dos números negativos, vale ressaltar que números decimais negativos não são inteiros, como – 2,5, ou até mesmo números irracionais, como o - π.

d) Correta, pois essa é a definição dos números reais.

e) Correta, pois as dízimas periódicas podem ser representadas por frações, logo são racionais, e todo número racional é também um número real.

8- Intervalo (20 min).

9- Definição de Raiz e Potência (50 min):

Faremos uma apresentação de slides abordando as propriedades de potências e raízes. Esse material impresso também será entregue aos alunos. Enquanto um apresenta os slides falando das definições, outro escreverá no quadro exemplos com as propriedades.

Tabela 10 - Definição de Potência.

Definição de Potência
Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e n de expoente, e o resultado desta operação de potência.

Tabela 11 - Propriedades de Potenciação.

Propriedades de Potenciação	
$a^0 = 1$	Para qualquer número $\boldsymbol{a}$ diferente de $\mathbf{0}$, temos que $\boldsymbol{a}$ elevado a $\mathbf{0}$ é $\mathbf{1}$.
$a^1 = a$	Qualquer número elevado a $\mathbf{1}$, o resultado é o próprio número.

$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$	Se um número $\boldsymbol{a}$ diferente de $\mathbf{0}$ possui o expoente negativo, o resultado é o inverso da base elevado ao expoente positivo.
$a^n * a^m = a^{n+m}$	Multiplicando potências de mesma base, mantém-se a base e somam-se os expoentes.
$a^n * b^n = (a * b)^n$	Multiplicando potencias com expoentes iguais, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases.
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	Na divisão de potências de mesma base, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes.
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	Na divisão de potências com mesmo expoente, mantém-se o expoente e divide-se as bases.
$(a^n)^p = a^{(n*p)}$	Na potência de uma potência, mantém-se a base e multiplica-se os expoentes.

Exemplos:

Multiplicação de potências de bases iguais, mantém-se a base e somam-se os expoentes.

$2^2 * 2^3 = 2^5$.

Divisão de potências de bases iguais, mantém-se as bases e subtraem-se os expoentes.

$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$.

Na potência de uma potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(2^3)^2 = 2^{3*2} = 2^6$.

Potenciação de quando a base é um produto, multiplicam-se as bases e mantém-se os expoentes.

$3^2 * 2^2 * 5^2 = (3 * 2 * 5)^2$.

Potenciação de quando a base é um quociente, divide-se as bases e mantém-se os expoentes.

$\frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Potenciação de expoente negativo, invertemos a base e o sinal do expoente.

$2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$ e também $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

Tabela 12 - Definição de Radiciação.

Definição de Radiciação
Enquanto a potenciação é uma multiplicação de números iguais, a radiciação procura descobrir quais são esses números. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número racional diferente de zero chamado de índice, e b é a raiz.

Tabela 13 - Propriedades da Radiciação.

Propriedades da Radiciação	
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	Potência de uma raiz: quando o expoente da potência é o mesmo índice da raiz, ambos se anulam.
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$	Quando um raiz é base de uma potência, o expoente $\boldsymbol{p}$ da potência, torna-se o expoente do radicando.
$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$	Quando o expoente da potência é uma fração, com $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$, resulta em uma raiz cujo índice é o denominador da fração e o numerador é o expoente da base.
$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n*p]{a}$	Raiz de uma raiz, mantém-se o radicando e multiplicam-se os índices.
$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$	Na multiplicação de raízes de mesmo índice, mantém-se o índice e multiplicam-se os radicandos.
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	A divisão de raízes de mesmo índice, quando $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ resulta em uma só raiz de

	índice $\boldsymbol{n}$ e a divisão é efetuada pelos radicandos.
$a * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n * b}$	O produto de um número real positivo $\boldsymbol{a}$ e uma raiz é igual a raiz do produto destes dois números, onde $\boldsymbol{a}$ ao ser transferido para o interior da raiz é elevado ao seu índice.
$a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$	Quando o expoente de uma potência é uma fração negativa, quando $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$, resulta em uma fração cujo denominador é uma raiz com índice $\boldsymbol{n}$ e o radicando está elevado a $\boldsymbol{p}$.

Exemplos:

A raiz de um número que está elevado a um expoente igual ao índice, é igual a esse próprio número.

$\sqrt[4]{2^4}$= $\sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2}$= 2.

No produto de raízes de mesmo índice, multiplicam-se os radicandos dentro da raiz.

$\sqrt[4]{81 * 16}$ = $\sqrt[4]{81}$ * $\sqrt[4]{16}$.

Na divisão de raízes de mesmo índice, dividem-se os radicandos dentro da raiz.

$\frac{\sqrt[2]{27}}{\sqrt[2]{3}}$ = $\sqrt[2]{\frac{27}{3}}$ = $\sqrt[2]{9}$ = 3.

Na raiz da raiz, basta multiplicarmos os índices.

$\sqrt[2]{\sqrt[4]{256}}$ = $\sqrt[2*4]{256}$ = $\sqrt[8]{256}$ = 2.

Na potência de uma raiz, elevamos o radicando pelo expoente.

$\left(\sqrt[2]{16}\right)^2$ = $\sqrt[2]{16^2}$ = 16.

Relação entre potências com expoente fracionário e a radiciação:

Para definir a relação entre potências com expoente fracionário e a radiciação, apresentaremos o padrão na tabela abaixo com o objetivo de fazer os alunos perceberem a divisão presente no expoente.

Tabela 14 - Exemplo de raízes.

$\sqrt[2]{2^6}$ = 8 = 2^3	$\sqrt[2]{2^8}$ = 16 = 2^4	$\sqrt[2]{2^{10}}$ = 32 = 2^5	$\sqrt[2]{5^4}$ = 25 = 5^2
$\sqrt[2]{2^6}$ = 4 = 2^2	$\sqrt[3]{3^9}$ = 27 = 3^3	$\sqrt[3]{4^3}$ = 4 = 4^1	$\sqrt[3]{5^3}$ = 5 = 5^1
$\sqrt[4]{3^{12}}$ = 27 = 3^3	$\sqrt[4]{5^4}$ = 5 = 5^1	$\sqrt[4]{5^8}$ = 25 = 5^2	$\sqrt[4]{5^{12}}$ = 125 = 5^3
$\sqrt[2]{2^3}$ = ?	$\sqrt[3]{2^4}$ = ?	$\sqrt[2]{3}$ = ?	$\sqrt[4]{5^2}$ = ?

Fonte: Autores (2023).

10- Jogo da velha (raiz e potência) (30 min):

DINÂMICA DO JOGO

Para esse jogo, os grupos de cinco e seis alunos deverão se subdividir da seguinte forma: grupos de cinco alunos se dividem em um grupo de dois e outro de três; grupos de seis alunos se dividem em dois grupos de três. Esses grupos divididos irão se enfrentar durante o jogo e as perguntas serão apresentadas nos slides. Vai ser distribuído uma folha sulfite para cada grupo, na qual pediremos para que eles desenhem em ambos os lados o cardinal (#) para o jogo. Cada pergunta vai ser apresentada nos slides, uma de cada vez, para todos os grupos resolverem. Dos grupos que competirão, aquele que terminar primeiro deve indicar que já finalizou a questão para que um professor possa ir verificar se acertou. Nesse momento, o grupo adversário pode continuar resolvendo caso queira. Se o grupo que terminou primeiro acertar a questão, vai poder marcar com a caneta (X ou O) no cardinal (#), porém, se errarem, não poderá marcá-lo e será a vez do outro grupo dar sua resposta. Se nenhum grupo acertar, ninguém pontua. O grupo que completar com o seu símbolo uma fileira na vertical, horizontal ou diagonal, como ocorre no jogo da velha, vai ganhar a rodada. Se der velha, ou seja, se ninguém conseguir completar uma fileira, ninguém pontua. Perguntas que serão utilizadas no jogo:

Quanto vale $(4^2)^{\frac{1}{4}}$? R = $4^{2*\frac{1}{4}}$ = $4^{\frac{2}{4}}$ = $4^{\frac{1}{2}}$ = $(2^2)^{\frac{1}{2}}$ = 2;

Quanto vale $(2^3)^{\frac{4}{3}}$? R = $2^{3*\frac{4}{3}}$ = $2^{\frac{4*3}{3}}$ = 2^4 = 16;

Quanto vale $3^2 * 3^2 * 3^2$? R = 3^{2+2+2} = 3^6 = 729;

Quanto vale? $\left(\sqrt[2]{\sqrt{4 * \sqrt{16}}}\right)^2$? R = $\left(\sqrt[2]{2 * 4}\right)^2$ = $\left(\sqrt[2]{8}\right)^2$= 8;

Quanto vale $7^2 + 7^2 + 7^2$? R = 3 * 7^2 = 3 * 49 = 147;

Quanto vale $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$? R = $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^6}}$ = $\sqrt[3]{2^3}$ = 2;

Quanto vale $(\sqrt[4]{5})^8$? R = $\sqrt[4]{5^8}$ = $\sqrt[4]{5^4 * 5^4}$ = 5 * 5 = 25;

Mariana tinha 121 balas e ela prometeu dar a raiz quadrada de suas balas a seu primo. Depois de dar as balas ao seu primo, deu ainda 27 balas a sua irmã mais nova. Com quantas balas ficou Mariana? R = 121 - $\sqrt{121}$ – 27 = 83;

Quanto vale $(12^0 + 5^0)^2$? R = $(1 + 1)^2$ = 2^2 = 4;

Qual é a raiz quadrada de 625? R = $\sqrt{625}$ = 25;

Quanto vale $(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}}$? R = $2^{\frac{3}{2}*\frac{8}{3}}$ = $2^{\frac{8}{2}}$ = 2^4 = 16;

Quanto vale -2^5 ? R = $-\ 2^5$ = - 32;

Qual é a raiz quadrada de 196? R = $\sqrt{196}$ = 14;

Quanto vale $(3 * 27)^{\frac{1}{4}}$? R =$(3 * 3^3)^{\frac{1}{4}}$ = $3^{4*\frac{1}{4}}$ = $3^{\frac{4}{4}}$ = 3;

Um gato come 5 ratos por dia. Quantos ratos, 5 gatos comem em 5 dias? R = 5 * 5 * 5 = 5^3 = 125;

Quanto vale $24^{-5} * 24^7$? R = 24^{-5+7} = 24^2 = 576;

Quanto vale $\frac{\sqrt[5]{100^5}}{5^{-1}}$? R = $100^{\frac{5}{5}}$ = 5^1 = $100^1 * 5^1$ = 500;

Em um estacionamento há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas e em cada roda há 4 parafusos. Qual é o total de parafusos desses 4 automóveis?
R = 4 $*$ 4 $*$ 4 = 4^3 = 64;

11- Lista de Exercícios (10 min):

1- Calcule a raiz indicada abaixo:

Tabela 15 - Exercícios.

a) $\sqrt[3]{48}$	c) $\sqrt{343}$	e) $\sqrt[3]{144}$	g) $\sqrt{\frac{16}{2}}$
b) $\sqrt[4]{256}$	d) $\sqrt{125}$	f) $\sqrt[3]{8}$	h) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{3}\right) \cdot 3}$

2- Simplifique a expressão:

Tabela 16 - Exercício.

$$\frac{2^n \cdot 4}{\sqrt[3]{8} \cdot 2^{3n+1}} =$$

3- Se elevarmos um número natural ao quadrado e tirarmos a raiz quadrada do resultado da potência, o que acontecerá? Isso ocorre também se elevarmos um número natural a uma potência n e tirarmos a raiz enésima do resultado da potência?

4- Por que quando elevamos um número à terceira potência, dizemos que elevamos esse número ao cubo?

5- (FATEC 2019, Adaptada) Entre as pessoas que compareceram na Feira das Profissões da Unioeste, estavam alguns dos amigos de Eduardo. Além disso, sabe-se que nem todos os melhores amigos de Eduardo foram à festa de inauguração.

Considere:

U: O conjunto de pessoas que foram na Feira das Profissões.

E: O conjunto dos amigos de Eduardo.

M: conjunto dos melhores amigos de Eduardo.

Com base nessas informações, construa um diagrama de Venn que represente os amigos e os melhores amigos do Eduardo em relação aos participantes da festa.

6- Em um cursinho pré-vestibular existem 600 alunos matriculados em matérias isoladas. 300 alunos cursam Matemática, 200 alunos frequentam as aulas de Português e 150 alunos não cursam essas disciplinas.

Considerando os alunos matriculados no cursinho (T), alunos cursando matemática (M) e alunos que cursam português (P), determine:

a) o número de alunos de Matemática ou Português.

b) o número de alunos de Matemática e Português.

Slides

Figura 12 - Slides utilizados em aula.

1

Radiciação, Potenciação e Conjuntos Numéricos

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

2

Quais as semelhanças?

3

Tipos de Conjuntos

Conjunto vazio: não possui elemento, representado por $A = \{\ \}$ ou $A = \emptyset$.

Conjuntos unitários: possui um único elemento, por exemplo, $D = \{1\}$.

4

Tipos de Conjuntos

Conjunto universo: é aquele considerado para estudar determinada situação, por exemplo, para estudar a faixa salarial de empregados, precisamos conhecer o universo pesquisado $U = \{funcionários\ da\ empresa\}$.

5

Tipos de Conjuntos

Conjuntos finitos: apresentam uma quantidade limitada de elementos, exemplos: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $C = \{Vogais\ no\ alfabeto\}$.

Conjuntos infinitos: apresentam uma quantidade ilimitada de elementos, exemplo: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100, ...\}$

6

Relações

Relação de pertinência: usamos o símbolo $\in$ para dizer que um elemento pertence a um conjunto, e $\notin$ para indicar que o elemento não pertence a um conjunto.

Exemplo: $2 \in \{1,2,3,4\}$, mas $5 \notin \{1,2,3,4\}$.

Dizemos que A é um subconjunto de B, se todos os elementos de A também pertencem também a B. Com os subconjuntos vem a relação de inclusão entre conjuntos.

7

Relações

Relação de inclusão: Usamos o símbolo $\subset$ para dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, $A \subset B$, significa que todos os elementos do conjunto A vai estar no conjunto B. Já o símbolo $\supset$ indica que um conjunto contém outro, ou seja, $A \supset B$ indica que A contém todos os elementos de B.

Exemplo: $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $A = \{Meses\ com\ 30\ dias\}$, temos que $B \supset A$ e $A \subset B$.

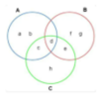
8

Por que diagrama de Venn?

- John Venn (1834-1923). Matemático Britânico.
- Estudando técnicas lógicas e a teoria da probabilidade, desenvolveu uma forma de representação gráfica das intersecções e uniões dos conjuntos, através de diagramas que levaram seu nome.

9

O que é o diagrama de Venn?



- É uma maneira de apresentar graficamente os conjuntos. Nele construímos uma linha fechada, inserindo em seu interior os elementos.
- A ideia é facilitar o entendimento nas operações básicas de conjuntos como; Relação inclusão e pertinência, união e intersecção, diferença e conjunto complementar.

10

Operações com conjuntos

União de conjuntos: Usando o símbolo $\cup$, dizemos que $A \cup B$, representa a união dos elementos do conjunto A com os de B, ou seja, a união dos conjuntos é a junção de seus elementos.

11

Exemplo

a) $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$, $A \cup B = ?$

b) $C = \{1,2\}$ e $D = \{2,3\}$, $C \cup D = ?$

c) $E = \{1,2\}$ e $F = \{1,2,3,4\}$, $E \cup F = ?$

12

Operações com conjuntos

Interseção de conjuntos: Usando o símbolo $\cap$, dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B.

13

Exemplo

a) $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, $A \cap B = ?$

b) $C = \{1, 2\}$ e $D = \{3, 4\}$, $C \cap D = ?$

c) $E = \{1, 2\}$ e $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $E \cap F = ?$

14

Exercício

(PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A, qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

15

Exercício

(ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

16

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

17

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a?

18

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$):

Chamamos de conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) o seguinte conjunto:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, ...\}$.

E chamamos de $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos:

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3, ...\}$.

Nesse conjunto, podemos definir duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação.

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$):
Chamamos de conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) o seguinte conjunto:
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Nesse conjunto, temos três subconjuntos notáveis:
$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$,
os interos não nulos;
$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$,

19 ★

Conjuntos Numéricos

o conjuntos dos inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2 - 1, 0\}$,
os inteiros não positivos.
No conjunto dos números inteiros podemos definir além das operações dos naturais, a operação de subtração.
Observe que todo número natural é inteiro, por isso escrevemos:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
Lê-se: "$\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$".

20 ★

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$):O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é composto pelos pares ordenados (ou frações)$\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. O conjunto dos racionais também possui três subconjuntos: racionais não nulos, racionais não negativos e não positivos, respectivamente $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{Q}_-$.
E no conjunto dos números racionais podemos definir a operação de divisão, além das demais operações.

21 ★

Conjuntos Numéricos

Representação decimal: Note que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Nessa passagem podem ocorrer dois casos:

1º- O número decimal tem uma quantiade finita de algarismos, uma decimal exata. Por exemplo:

$\frac{3}{1} = 3$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{20} = 0{,}05$; $\frac{27}{1000} = 0{,}027$

22 ★

Conjuntos Numéricos

2º- O número decimal tem uma quantidade infinita da algarismos que se repetem periodicamente, uma dízima periódica. Por exemplo:

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$

$\frac{11}{6} = 1{,}8333\ldots = 1{,}8\overline{3}$

$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots = 0{,}\overline{285714}$

23 ★

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$):
Números cuja representação decimal possuem infinitas casas decimais não periódicas, são chamados de irracionais. Por exemplo:

$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$

$\pi = 3{,}14159\ldots$

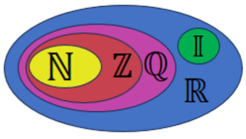
24 ★

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$):
É o conjunto formado por todos os números com representação decimal, ou seja, decimais exatas ou periódicas e as decimais não exatas e periódicas, ou seja, os conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e também $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

25 ★

Conjuntos Numéricos



26 ★

Exercício

1) Sobre conjuntos numéricos, são feitas as seguintes afirmações:
a. Todo número inteiro é natural;
b. Todo número natural é racional;
c. Todo número real é irracional;
d. Todo número racional é natural;
e. Todo número natural é inteiro.
Qual(is) dessas afirmações é (são) verdadeira(s)?

27 ★

Potência

Usamos essa operação matemática para multiplicar um número por ele mesmo várias vezes. Dado um número real a e um número racional n, a expressão a^n, indica o produto de n fatores iguais ao número real a. Chamamos a de base e n de expoente, e o resultado desta operação de potência.

28 ★

Potência

Propriedades de Potenciação	
$a^0 = 1$	Para qualquer número a diferente de 0, temos que a elevado a 0 é 1.
$a^1 = a$	Qualquer número elevado a 1, o resultado é o próprio número.
$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$	Se um número a diferente de 0 possui o expoente negativo, o resultado é o inverso da base elevado ao expoente positivo.
$a^n * a^m = a^{n+m}$	Multiplicando potências de mesma base, mantém-se a base e somam-se os expoentes.

29 ★

Potência

$a^n * b^n = (a * b)^n$	Multiplicando potencias com expoentes iguais, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases.
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	Na divisão de potências de mesma base, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes.
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	Na divisão de potências com mesmo expoente, mantém-se o expoente e divide-se as bases.
$(a^n)^p = a^{(n*p)}$	Na potência de uma potência, mantém-se a base e multiplica-se os expoentes.

30 ★

Propriedades

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$

$a^n * a^m = a^{n+m}$

$a^n * b^n = (a * b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^p = a^{(n*p)}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

31 ★

Exemplo

a) $2^2 * 2^3 = ?$
b) $\frac{2^3}{2^5} = ?$
c) $(2^3)^2 = ?$
d) $3^2 * 2^2 * 5^2 = ?$
e) $\frac{2^2}{3^2} = ?$
f) $2^{-4} = ?$

32 ★

Radiciação

Enquanto a potenciação é uma multiplicação de números iguais, a radiciação procura descobrir quais são esses números. Pode ser representado como $\sqrt[n]{a} = b$, sendo a um número real chamado radicando, n é um número racional diferente de zero chamado de índice, e b é a raiz.

33 ★

Radiciação

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$	Na multiplicação de raízes de mesmo índice, mantém-se o índice e multiplicam-se os radicandos.
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	A divisão de raízes de mesmo índice, quando $b \neq 0$ resulta em uma só raiz de índice n e a divisão é efetuada pelos radicandos.
$a * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n * b}$	O produto de um número real positivo a e uma raiz é igual a raiz do produto destes dois números, onde a ao ser transferido para o interior da raiz é elevado ao seu índice.
$a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$	Quando o expoente de uma potência é uma fração negativa, quando $a, n \neq 0$, resulta em uma fração cujo denominador é uma raiz com índice n e o radicando está elevado a p.

34 ★

Radiciação

Propriedades da Radiciação	
$(\sqrt[n]{a})^n = a$	Potência de uma raiz: quando o expoente da potência é o mesmo índice da raiz, ambos se anulam.
$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$	Quando um raiz é base de uma potência, o expoente p da potência, toma-se o expoente do radicando.
$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$	Quando o expoente da potência é uma fração, com $p \neq 0$, resulta em uma raiz cujo índice é o denominador da fração e o numerador é o expoente da base.
$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n*p]{a}$	Raiz de uma raiz, mantém-se o radicando e multiplicam-se os índices.

35 ★

Propriedades

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$

$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n*p]{a}$

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$a * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n * b}$

$a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$

36 ★

Exemplo

a) $\sqrt[4]{2^4} = ?$
b) $\sqrt[4]{81 * 16} = ?$
c) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{3}} = ?$
d) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{256}} = ?$
e) $(\sqrt[4]{16})^2 = ?$

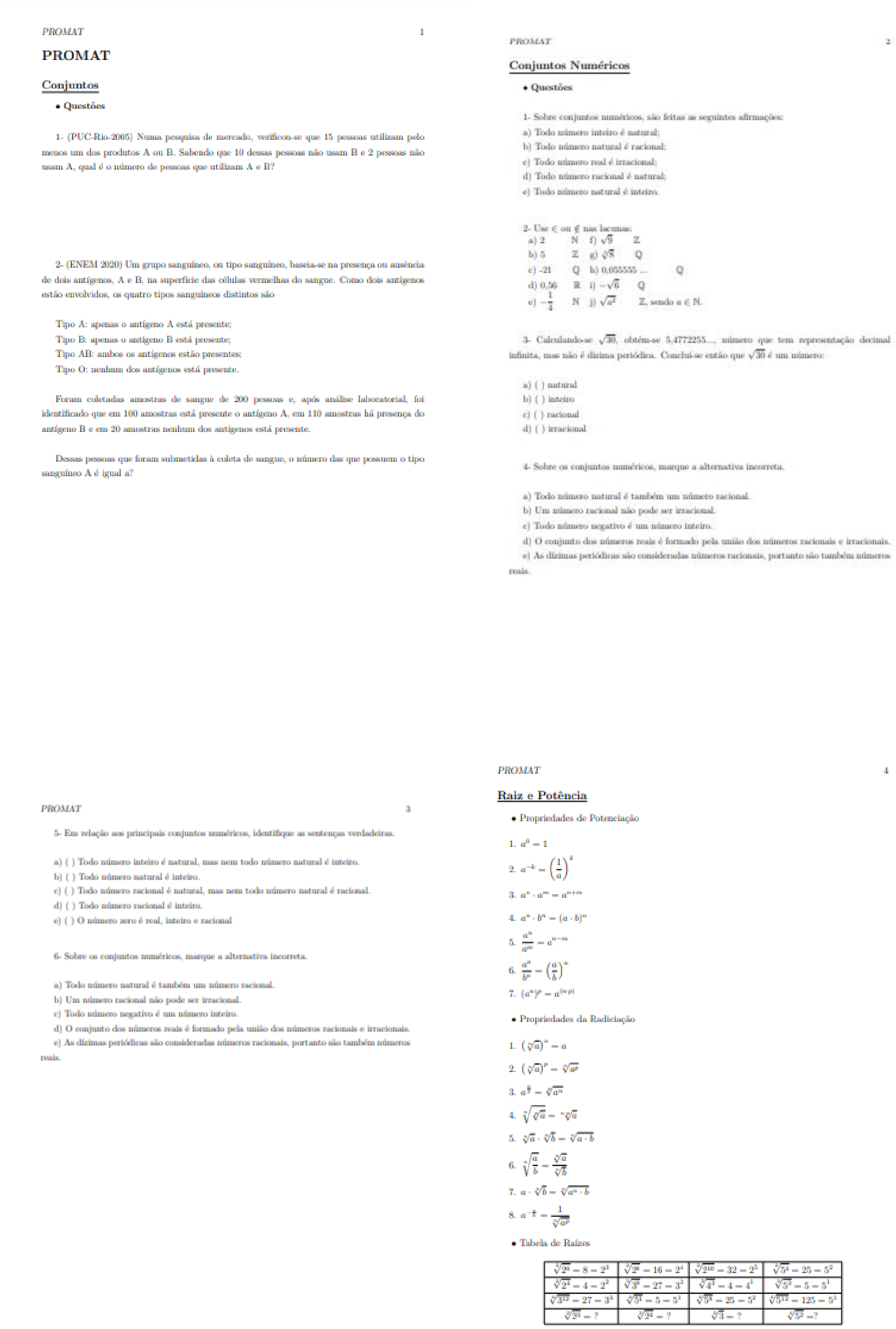
37 ★

Hora do Jogo

38 ★

6.2 Material entregue aos alunos

Figura 13 - Material entregue aos alunos.



PROMAT 1

PROMAT

Conjuntos

- **Questões**

1- (PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A, qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

2- (ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a?

PROMAT 2

Conjuntos Numéricos

- **Questões**

1- Sobre conjuntos numéricos, são feitas as seguintes afirmações:
a) Todo número inteiro é natural;
b) Todo número natural é racional;
c) Todo número real é irracional;
d) Todo número racional é natural;
e) Todo número natural é inteiro.

2- Use $\in$ ou $\notin$ nas lacunas:
a) 2 $\mathbb{N}$ f) $\sqrt{9}$ $\mathbb{Z}$
b) 5 $\mathbb{Z}$ g) $\sqrt[3]{8}$ $\mathbb{Q}$
c) -21 $\mathbb{Q}$ h) 0,055555 ... $\mathbb{Q}$
d) 0,56 $\mathbb{R}$ i) $-\sqrt{6}$ $\mathbb{Q}$
e) $-\frac{1}{4}$ $\mathbb{N}$ j) $\sqrt{a^2}$ $\mathbb{Z}$, sendo $a \in \mathbb{N}$.

3- Calculando-se $\sqrt{30}$, obtém-se 5,4772255..., número que tem representação decimal infinita, mas não é dízima periódica. Conclui-se então que $\sqrt{30}$ é um número:

a) ( ) natural
b) ( ) inteiro
c) ( ) racional
d) ( ) irracional

4- Sobre os conjuntos numéricos, marque a alternativa incorreta.

a) Todo número natural é também um número racional.
b) Um número racional não pode ser irracional.
c) Todo número negativo é um número inteiro.
d) O conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais.
e) As dízimas periódicas são consideradas números racionais, portanto são também números reais.

PROMAT 3

5- Em relação aos principais conjuntos numéricos, identifique as sentenças verdadeiras.

a) ( ) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
b) ( ) Todo número natural é inteiro.
c) ( ) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
d) ( ) Todo número racional é inteiro.
e) ( ) O número zero é real, inteiro e racional

6- Sobre os conjuntos numéricos, marque a alternativa incorreta.

a) Todo número natural é também um número racional.
b) Um número racional não pode ser irracional.
c) Todo número negativo é um número inteiro.
d) O conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais.
e) As dízimas periódicas são consideradas números racionais, portanto são também números reais.

PROMAT 4

Raiz e Potência

- Propriedades de Potenciação

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
6. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
7. $(a^n)^p = a^{(n \cdot p)}$

- Propriedades da Radiciação

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
3. $a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$
5. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
7. $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
8. $a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$

- Tabela de Raízes

$\sqrt[2]{2^6} = 8 = 2^3$	$\sqrt[2]{2^8} = 16 = 2^4$	$\sqrt[2]{2^{10}} = 32 = 2^5$	$\sqrt[2]{5^4} = 25 = 5^2$
$\sqrt[2]{2^4} = 4 = 2^2$	$\sqrt[3]{3^9} = 27 = 3^3$	$\sqrt[2]{4^2} = 4 = 4^1$	$\sqrt[3]{5^3} = 5 = 5^1$
$\sqrt[4]{3^{12}} = 27 = 3^3$	$\sqrt[4]{5^4} = 5 = 5^1$	$\sqrt[4]{5^8} = 25 = 5^2$	$\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$
$\sqrt[2]{2^3} = ?$	$\sqrt[3]{2^4} = ?$	$\sqrt[2]{3} = ?$	$\sqrt[4]{5^2} = ?$

PROMAT 5

Atividades para Revisão

1- Calcule a raiz indicada abaixo:

a) $\sqrt[3]{48} =$

b) $\sqrt[4]{256} =$

c) $\sqrt{343} =$

d) $\sqrt{125} =$

e) $\sqrt[3]{144} =$

f) $\sqrt[3]{8} =$

g) $\sqrt{\frac{16}{2}} =$

h) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{3}\right) \cdot 3} =$

2- Simplifique a seguinte expressão:

$$\frac{2^n \cdot 4}{\sqrt[3]{8} \cdot 2^{3n+1}}$$

3- Se elevarmos um número natural ao quadrado e tirarmos a raiz quadrada do resultado da potência, o que acontecerá? Isso ocorre também se elevarmos um número natural a uma potência n e tirarmos a raiz enésima do resultado da potência?

PROMAT 6

4- Por que quando elevamos um número à terceira potência, dizemos que elevamos esse número ao cubo?

5- (FATEC 2019, Adaptada) Entre as pessoas que compareceram na Feira das Profissões da Unioeste, estavam alguns dos amigos de Eduardo. Além disso, sabe-se que nem todos os melhores amigos de Eduardo foram à festa de inauguração.

Considere:
U: O conjunto de pessoas que foram na Feira das Profissões.
E: O conjunto dos amigos de Eduardo.
M: conjunto dos melhores amigos de Eduardo.

Com base nessas informações, construa um diagrama de Venn que represente os amigos e os melhores amigos do Eduardo em relação aos participantes da festa.

6- Em um cursinho pré-vestibular existem 600 alunos matriculados em matérias isoladas. 300 alunos cursam Matemática, 200 alunos frequentam as aulas de Português e 150 alunos não cursam essas disciplinas.

Considerando os alunos matriculados no cursinho (T), alunos cursando matemática (M) e alunos que cursam português (P), determine:

a) o número de alunos de Matemática ou Português.
b) o número de alunos de Matemática e Português.

6.3 Relatório

2° ENCONTRO (23/09/2023)

Sala A209

<u>Grupo de Estágio:</u> Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

O segundo encontro do PROMAT ocorreu na data de 23 de setembro de 2023. Nesse dia, optamos por iniciá-lo de forma diferente da aula anterior. Como já estávamos familiarizados com grande parte da turma, não seria necessário dinâmicas que trouxessem interação entre todos logo no início. Portanto, assim que a maioria se dispôs em suas respectivas carteiras, iniciamos com o conteúdo que seria abordado na primeira parte da manhã que foi Conjuntos e Conjuntos Numéricos. Decidimos que quem ministraria estes dois primeiros conteúdos seria o Vitor e o Alisson, e o próximo conteúdo, após a volta do intervalo, que foi sobre Potenciação e Radiciação seria explicado pela Michelli e pelo Maíri. Essa separação vem como um teste para ver se este formato seria mais didático.

Utilizando a projeção de uma imagem com diversos objetos, veículos, frutas, entre outros, na qual, referente a alguma característica específica, pedimos os alunos se podiam discernir qual conjunto de elementos seria formado, por exemplo: quais figuras desta imagem possuem duas rodas? Nesse caso, teríamos um conjunto formado pelos elementos moto e bicicleta, e assim, com outros questionários, foram surgindo novos conjuntos de variados elementos e, dessa maneira seguiu-se a aula. Contudo, junto a essas pequenas séries de perguntas, abordamos os conceitos iniciais sobre o que é um conjunto de elementos, o que é um elemento, como conseguimos distingui-los e suas definições, trazendo o conceito de conjuntos vazio, unitário, universo e outros aspectos. Com tais informações frescas, demonstramos que poderíamos escrever de forma gráfica um conjunto por meio do Diagrama de Venn e, aproveitando esse gancho, abordamos seis quesitos que estão incluídos nesse material, os quais são: pertence e não pertence, contido e não contido, união e interseção. Após demonstrações e dúvidas esclarecidas, foram realizadas duas questões para fixação. Tais problemas foram concluídos com precisão por grande maioria da sala e os alunos que apresentaram dificuldades receberam atenção dos professores para sanar suas dúvidas.

Encerrado o conteúdo de conjuntos, partimos para os conjuntos numéricos, nos quais, redigimos os conjuntos dos números: naturais, inteiros, racionais, irracionais e o conjunto dos números reais e, por meio do Diagrama de Venn, demostramos as interações entre os mesmos. Após essa abordagem, foram entregues cinco questões para revisão, e suas correções ficaram para o próximo encontro. Em seguida, assim que os estudantes retornaram do intervalo, lecionamos as propriedades e definições de Potenciação, seguidas de exemplos. Neste momento ocorreram duas perguntas: porque aceitamos que um número (não nulo) elevado a um expoente negativo se torna uma fração e porque um número (não nulo) elevado a zero é igual a um. A maneira que utilizamos para responder essas duas perguntas foi perguntar ao orientador/professor se ele teria interesse em demonstrar do porquê isto acontece, por motivos dele já ter esclarecido isto para nós em uma outra ocasião, e assim foi feito, o professor foi ao quadro, lecionou de maneira sucinta e clara e os alunos compreenderam bem a ideia. Após a pequena participação do nosso orientador, continuamos com as definições que ainda não tinham sido recapituladas e desta forma que se seguiu a aula. Encerrada essa parte de definições, trouxemos alguns exemplos para melhor entendimento, e tivemos a participação de alguns alunos dispostos a resolver no quadro e como gratificação eles receberam um bombom. Da mesma forma seguimos com o conteúdo de Radiciação.

Com intuito de finalizar o encontro desse dia, decidimos trazer um jogo da velha que englobava todas as definições que haviam sido apresentadas referente à Potenciação e Radiciação. Essa dinâmica foi constituída em grupos de quatro alunos. Dentro dos grupos, seriam formadas duas duplas para que a atividade ocorresse, e o intuito era resolver expressões matemáticas. Assim que resolvidas, tinham que nos chamar para conferir o resultado e, em seguida, marcar uma das nove casas do jogo da velha. Aquele que marcar três casas na diagonal, vertical ou horizontal ganharia. Perante o tempo se esvaindo, entregamos bombons para todos com intuito de agradecer por serem participativos.

7. Encontro 3

7.1 Plano de Aula

PROMAT: Encontro 3 – 30/09

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Equações do 1° grau e do 2° grau.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Revisar as definições de equações do 1° e do 2° grau.

Objetivos específicos:

- Saber a diferença entre variável e incógnita;
- Relembrar como se resolve as equações com uma ou duas incógnitas;
- Identificar qual tipo de equação está sendo trabalhada;
- Realizar cálculos de forma que a igualdade da equação seja mantida;
- Entender os conceitos matemáticos e conseguir solucionar as atividades.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, livro didático, lápis, borracha e caderno.

Encaminhamento metodológico:

Nesse encontro, como a quantidade de definições do conteúdo é menor, trabalharemos o conteúdo no quadro, sem a utilização de projetor de slides.

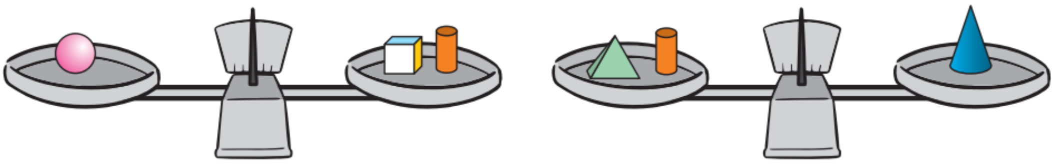
1- Correção das tarefas do encontro anterior (15 min):

Nos primeiros minutos da aula, corrigiremos um ou dois exercícios deixados para tarefa de casa. Caso os alunos não solicitem um exercício específico, escolheremos algum deles.

2- Introdução às equações (30 min):

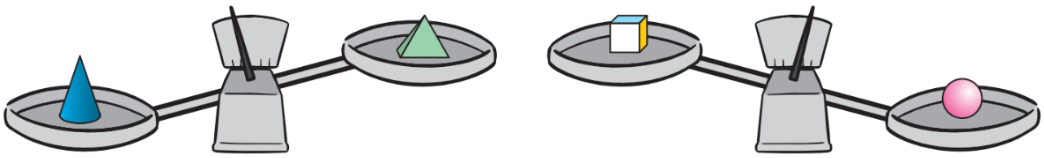
(OBMEP 2019) - Paulinho tem peças com cinco formas diferentes (cubos, pirâmides, esferas, cilindros e cones). Peças com a mesma forma têm o mesmo peso (massa). Ele coloca algumas peças numa balança de pratos e observa o equilíbrio nas duas situações abaixo.

Figura 14 - Balança de Pratos.



a) Indique se as figuras abaixo representam situações certas ou erradas.

Figura 15 - Balança de Pratos.



b) Qual das figuras abaixo representa a situação correta?

Figura 16 - Balança de Pratos.

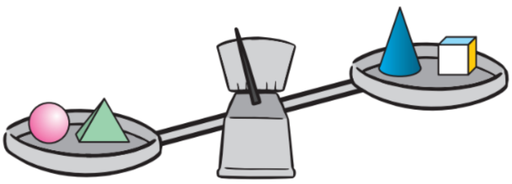


Figura A

Figura B

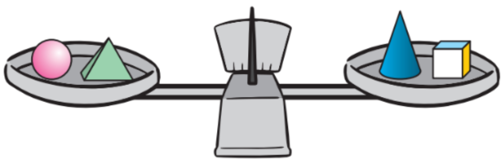
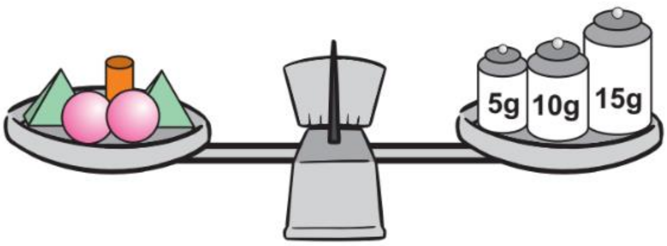


Figura C

c) Com alguns pesos conhecidos, Paulinho observou a situação de equilíbrio abaixo. Quanto pesam, juntos, um cubo, uma pirâmide, uma esfera, um cilindro e um cone?

Figura 17 - Balança de pratos.



Solução: a) A primeira figura, o cone mais pesado que a pirâmide, está correta, pois um cilindro e a pirâmide tem o mesmo peso que o cone, se retirarmos o cilindro, a balança pesa para o lado do cone.

Já a segunda figura, a esfera mais pesada mais pesada que o cubo, está correta, pois um cubo e um cilindro pesam o mesmo que a esfera, então se removermos o cilindro, a balança pesa para o lado da esfera.

Questão b), uma forma de pensar é a seguinte, se juntarmos o conteúdo das duas primeiras situações, ficamos com uma esfera, uma pirâmide e um cilindro em um dos pratos. E no outro prato ficamos com um cubo, um cilindro e um cone, como os objetos adicionados têm o mesmo peso, a balança continua equilibrada. Se tirarmos um cilindro de cada um dos pratos, a igualdade se mantém, então a figura correta é a que mostra uma balança equilibrada.

Já para a questão c) podemos analisar a resposta da pergunta anterior, como sabemos que uma esfera e uma pirâmide têm o mesmo peso que um cone e um cubo, podemos trocar um par por outro e o peso continua o mesmo. Então temos que a massa de todos os sólidos somados é de $30\ g$.

3- Igualdade e princípios de Equivalência (10 min).

Propriedades da igualdade

1ª Propriedade: $a = a$, para qualquer a. Essa é a propriedade reflexiva. Exemplo:

$$2 = 2,$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

2ª Propriedade: $a = b \Leftrightarrow b = a$, para quaisquer a e b. Essa é a propriedade simétrica. Exemplo:

$$2 + 5 = 7 \Leftrightarrow 7 = 2 + 5,$$

$$2^3 - 5 = 3 \Leftrightarrow 3 = 2^3 - 5.$$

3ª Propriedade: $a = b\ e\ b = c\ \Rightarrow a = c$, para quaisquer a, b e c. Essa é a propriedade transitiva. Exemplo:

$$2 + 5 = 7\ e\ 7 = 8 - 1 \Rightarrow 2 + 5 = 8 - 1,$$

$$2^3 - 5 = 3\ e\ 3 = 2 + 2^0 \Rightarrow 2^3 - 5 = 2 + 2^0.$$

Os princípios de equivalência são úteis para resolver as equações. Iremos estudar dois princípios, o aditivo e o multiplicativo.

Princípio aditivo: adicionando um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade,

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Exemplo:

$$2^3 + 10 = 4 * 3 + 4,$$

$$(2^3 + 10) + 5 = (4 * 3 + 4) + 5.$$

Princípio multiplicativo: multiplicando os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, obtemos uma nova igualdade,

$$a = b \Leftrightarrow a * c = b * c, \;\; com\; c \neq 0.$$

Exemplo:

$$2 + 4 = 9 - 3,$$

$$(2 + 4) * 2 = (9 - 3) * 2.$$

4- Definição e Exemplos (20 min):

Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja um ou mais símbolos que representam números desconhecidos dessa sentença, é denominada **equação**.

Cada símbolo que representa um número desconhecido chama-se **incógnita**.

Incógnita como vimos é o nome pelo qual o x, ou outro símbolo, é chamado em uma equação, já variável está relacionada com funções, ou seja, o x, ou outro símbolo, pode ser assumir vários valores diferentes.

Toda equação que pode ser reduzida à forma $ax + b = 0$, em que x representa a incógnita e $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, é denominada **equação do 1º grau** na incógnita x.

Exemplo: vamos resolver a equação $5x + 1 = 36$.

Para resolver uma equação, precisamos encontrar um valor para a incógnita que satisfaça a igualdade. Uma forma de fazer isso é isolando a incógnita em um dos lados da equação.

O valor encontrado é chamado de **solução** ou **raiz** da equação.

Então, primeiro podemos usar o princípio aditivo de equivalência para isolarmos o $5x$ em um dos lados. Para isso, podemos adicionar -1 em ambos os lados da igualdade:

$$5x + 1 + (-1) = 36 + (-1),$$
$$5x + 1 - 1 = 36 - 1,$$
$$5x = 35.$$

Agora, para deixarmos apenas o x em um dos lados da equação, podemos usar o princípio multiplicativo da equivalência e multiplicar ambos os lados por $\frac{1}{5}$:

$$5x * \frac{1}{5} = 35 * \frac{1}{5},$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{35}{5},$$
$$x = 7.$$

Assim temos que 7 é raiz ou solução da equação $5x + 1 = 36$.

5- Jogo Bingo das equações do 1° grau (25 min):

Disponibilizaremos as cartelas do Bingo aos alunos, com o resultado das equações. Desta forma, escreveremos as questões no quadro, que eles devem resolver. Se a resolução estiver correta, marcam a pedra, e vence quem completar uma linha, uma coluna, uma diagonal ou os quatro cantos da cartela.

As equações a serem resolvidas são as seguintes:

- $2x + 7 = -17;$ $x = -12$
- $7x - 45 = 2x - 45;$ $x = 0$
- $2x + 7 = -27;$ $x = -17$
- $2x - 16 = 50;$ $x = 33$
- $2x - 7 = -36 - 3;$ $x = -16$
- $2x - 5 = 3x + 10 - 2;$ $x = -13$
- $2x + 7 = 36 + 3;$ $x = 16$
- $2x - 70 = -3x + 105;$ $x = 35$
- $\frac{x}{12} + 1 = \frac{48}{12} + 1;$ $x = 48$
- $\frac{x}{3} - 18 = 0;$ $x = 54$
- $2x + 24 = 4x - 12;$ $x = 18$
- $-12x + 120 = -2x - 2;$ $x = 14$
- $3x + 8 = 4x - 7;$ $x = 15$
- $x - 5 = 31;$ $x = 36$
- $2x + 7 = x - 53;$ $x = 46$
- $-2x + 12 = -4x - 18;$ $x = -15$
- $3x - 4 = 34 + x;$ $x = 19$
- $7x + 25 = 2x - 45;$ $x = -14$
- $\frac{x}{7} = 105 - 2x;$ $x = 49$
- $8x + 80 = -2x - 120;$ $x = -20$
- $3x = -2x - 18;$ $x = -18$
- $4x - 5 = 75;$ $x = 20$
- $5x - 5 = 60;$ $x = 13$
- $3x + 2 = 95;$ $x = 31$
- $\frac{x}{5} = 10;$ $x = 50$
- $4x - 68 = 0;$ $x = 17$
- $\frac{x}{2} + 2x = 95;$ $x = 38$
- $5x + 25 = 150;$ $x = 25$

- $\frac{x-1}{5} = 10;$ $x = 51$
- $5x + 3 = 180;$ $x = 21$
- $2x - 3x = 3x - 4;$ $x = 1$
- $-3 = x + 1;$ $x = -4$
- $\frac{x}{22} + 2 = 4;$ $x = 44$
- $5x + 17 = 27 + 3x;$ $x = 5$
- $60 + 36x = 30x;$ $x = -10$
- $2x - 110 = -3x;$ $x = 22$
- $10x + 16 = 14x + 8;$ $x = 2$
- $3x + 5 = 2;$ $x = -1$
- $6x = 2x + 28;$ $x = 7$
- $x - 2x + 11 = 22;$ $x = -11$
- $x + 15 = 38;$ $x = 23$
- $3x - 5 = 13;$ $x = 6$
- $\frac{x}{3} + 26 = x;$ $x = 39$
- $5x - 1 = 8x + 5;$ $x = -2$
- $2x + 6 = x + 18;$ $x = 12$
- $x + 3 = 27;$ $x = 24$
- $3x = -27;$ $x = -9$
- $x - 9 = -1;$ $x = 8$
- $\frac{x}{10} - 2 = 2;$ $x = 40$
- $x + 6 = -8 - x;$ $x = -7$
- $\frac{x}{12} - 5 = 8;$ $x = 26$
- $2x + 7 = -31;$ $x = -19$
- $\frac{2x+2}{3} = 28;$ $x = 41$
- $2x - 3 = 17;$ $x = 10$
- $x + \frac{1}{2} + 14 = x + 1;$ $x = 27$
- $3x - 5 = 136;$ $x = 47$
- $5 + 6x = 5x + 2;$ $x = -3$
- $\frac{x}{26} = 2;$ $x = 52$
- $4x - 8 = 3x + 3;$ $x = 11$
- $\frac{x}{4} + 7 = 14;$ $x = 28$
- $(x - 1/26) = 2;$ $x = 53$
- $7x + 14 = 4x - 10;$ $x = -8$
- $\frac{x}{3} - 14 = 0;$ $x = 42$
- $2x = -3x + 15;$ $x = 3$
- $4x + 10 = x - 8;$ $x = -6$
- $x - 8 = 1;$ $x = 9$
- $\frac{x+4}{3} - 11 = 0;$ $x = 29$
- $15 = x + 20;$ $x = -5$
- $x + 0 = 43;$ $x = 43$
- $5x - 3 = 2x + 9;$ $x = 4$
- $\frac{x+2}{4} + x = 9 + x;$ $x = 34$
- $\frac{3x}{3} = \frac{90}{3};$ $x = 30$
- $\frac{x}{3} = 15;$ $x = 45$
- $2x - 37 = x;$ $x = 37$
- $\frac{x}{8} + 5 = 9;$ $x = 32$

Figura 18 - Cartela do bingo.

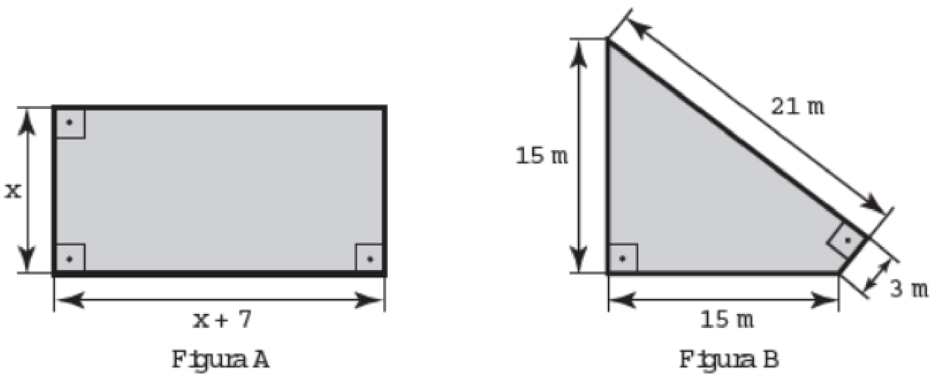
B	I	N	G	O
-15	-4	11	27	42
-12	0	16	30	47
-8	3	π	32	50
-6	5	21	35	53
-1	8	25	38	54

Intervalo (20 min).

6- Problema de Equação do 2°Grau (20 min):

(Questão 31-Enem 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Figura 19 - Ilustração da questão do ENEM 2016.



Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a?

Solução:

Como os terrenos devem ter a mesma medida, primeiro calculamos a área do terreno B, separando em dois triângulos.

$\frac{B*A}{2} = \frac{15*15}{2} = 112{,}5m^2$; $\frac{B*A}{2} = \frac{3*21}{2} = 31{,}5m^2$.

Área do terreno $B = 112{,}5 + 31{,}5 = 144m^2$.

Área do terreno $A = (x + 7) * x = 144$ (aplicamos a distributiva em x):

$$x^2 + 7x - 144 = 0.$$

Usando Bhaskara, temos: $a = 1$, $b = 7$, $c = -144$ e $\Delta = b^2 - 4 * a * c$,

$\Delta = 7^2 - 4 * 1 * (-144) = \Delta = 625$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a},$$

e $\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$. Podemos decompor 625 em fatores primos, assim, temos 5^4 ou $5^2 * 5^2$. Então, $\sqrt[2]{5^2 * 5^2} = 5 * 5 = 25$.

$x = \frac{-7 \pm 25}{2}$, $x' = \frac{18}{2} = 9$, e $x'' = \frac{-32}{2} = -16$.

Como um lado do terreno não pode ser negativo, ficamos com $x' = 9$.

7- Definição (10 min):

Denomina-se **equação do 2º grau** na incógnita x toda equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $a \neq 0$.

Os números a, b e c são chamados de coeficientes, em que:

- a é o coeficiente do termo x^2;
- b é o coeficiente do termo x;
- c é o coeficiente sem incógnita ou termo independente de x.

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, chamamos a equação do 2º grau de **completa**.

Quando $b = 0$ ou $c = 0$, chamamos a equação do 2º grau de **incompleta**.

8- Métodos de Resolução (20 min):

Resolvendo equações incompletas: para resolvermos as equações incompletas precisamos lembrar dessas propriedades:

- Para $x, y \in \mathbb{R}$, e $x * y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$;
- Para $x, y \in \mathbb{R}$, e $x^2 = y \Rightarrow x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Resolvendo equações na forma $ax^2 + bx = 0$:

Por exemplo a seguinte equação:

$$x^2 = 3x,$$

Aplicando a propriedade aditiva, chegamos na forma $ax^2 + bx = 0$,

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x - 3) = 0.$$

Agora pela primeira propriedade temos que $x = 0$ ou $x - 3 = 0$, e nesse último caso temos:

$$x - 3 = 0,$$

$$x = 3.$$

Então, para a equação de 2º grau incompleta $x^2 = 3x$, as soluções procuradas são 3 ou 0.

Resolvendo equações na forma $ax^2 + c = 0$:

Vale ressaltar que para resolver equações nessa forma precisamos ter c com valor negativo no lado esquerdo da equação.

A medida da área de uma praça quadrada é $144m^2$. Quanto mede o lado dessa praça?

$$x^2 = 144,$$

$$x = \pm\sqrt{144},$$

$$x = \pm 12.$$

Utilizamos a notação $x = \pm\sqrt{a}$ para representar $x = +\sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Resolvendo equações completas:

Para resolver equações do 2º grau completas, existem três principais diferentes métodos.

Método de soma e produto das raízes:

Uma forma de identificar as raízes de uma equação do 2º grau é por meio da relação de soma e produto das raízes.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e x' e x'' sendo as raízes reais dessa equação.

Temos que:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a},$$

e temos que:

$$x' * x'' = \frac{c}{a}.$$

Exemplo:

Vamos resolver a equação $3x^2 - 15x + 12 = 0$ por meio da soma e produto. Sabemos que a soma das raízes é

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-(-15)}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

E sabemos que o produto é

$$x' * x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{12}{3} = 4.$$

Então, agora temos que a soma das raízes é 5 e que seu produto é 4. Logo precisamos encontrar esses números que, neste caso, são $x' = 1$ e $x'' = 4$.

Para ter certeza, podemos tirar a prova real substituindo-os na equação $3x^2 - 15x + 12 = 0$. Primeiro, para $x' = 1$:

$$3(1)^2 - 15(1) + 12 = 0,$$

$$3(1) - 15 + 12 = 0,$$

$$3 - 3 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Agora, substituindo $x'' = 4$:

$$3(4)^2 - 15(4) + 12 = 0,$$

$$3(16) - 60 + 12 = 0,$$

$$48 - 48 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Então, assim concluímos que as raízes da equação $3x^2 - 15x + 12 = 0$ são 1 e 4.

Processo de completar quadrados:

Para este método temos dois casos:

1° quando a equação é um trinômio quadrado perfeito.

2° quando a equação não é um trinômio quadrado perfeito.

Mas o que é um trinômio quadrado perfeito?

São quando as equações do segundo grau são resultantes de um produto notável.

Exemplo 1°

Calcule as raízes da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$

Para saber se essa equação é um produto notável, aplicamos a raiz quadrada nos coeficientes a e c. Se existirem raízes exatas, sabemos que esta equação resulta em um produto notável do tipo: $(x + 3)^2$ = 0 e, portanto, é um trinômio quadrado perfeito, pois ao efetuar a multiplicação deste polinômio quadrado da soma volta na equação original.

$$(x + 3) * (x + 3) = 0$$

x = - 3 ou x = - 3.

Desta forma -3 é raiz da equação.

Exemplo 2°

Calcule as raízes da equação $x^2 + 6x - 7 = 0$

Ao aplicar a raiz quadrada nos coeficientes a e c, notamos que o coeficiente a terá raiz exata, mas o coeficiente c não. Desta forma, teremos que completar o quadrado.

Bhaskara:

A fórmula resolutiva da equação completa do 2º grau é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é usualmente representada pela letra grega Δ e é chamada discriminante da equação. Por isso, a fórmula resolutiva também pode ser escrita assim:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

9- Bingo 2, Equações do 2° grau (40 min):

Este jogo será semelhante ao bingo 1, mas agora com equações do 2° grau, podendo ser possível resolver por Bhaskara ou soma e produto. Seguem as equações que serão passadas no quadro:

- $x^2 + 5x + 4 = 0$ S={$x \in \mathbb{R} / x = -4 \; ou \; x = -1$};
- $2x^2 - 6x - 8 = 0$ S={$x \in \mathbb{R} / x = -1 \; ou \; x = 4$};
- $x^2 - 5x + 6 = 0$ S={$x \in \mathbb{R} / x = 2 \; ou \; x = 3$};
- $-x^2 = -7x + 10$ S={$x \in \mathbb{R} / x = 2 \; ou \; x = 5$};
- $3x^2 - 18 = -15$ S={$x \in \mathbb{R} / x = 1 \; ou \; x = -6$};

- $-4x^2 + 8x - 4 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 1\}$;
- $x^2 - 3x + 2 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 2 \; ou \; x = 1\}$;
- $x^2 + 6x - 7 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = -7 \; ou \; x = 1\}$;
- $3x^2 - 27 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 3 \; ou \; x = -3\}$;
- $x^2 - 4x - 5 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 5 \; ou \; x = -1\}$;
- $7x^2 - 28 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 2 \; ou \; x = -2\}$;
- $9x^2 - 6x + 1 = 0$ S=$\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{3}\right\}$;
- $x^2 - 8x + 15 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = -3 \; ou \; x = -5\}$;
- $3x^2 + 2x - 1 = 0$ S=$\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{3} \; ou \; x = -1\right\}$;
- $x^2 + 12x + 36 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 6\}$;
- $2x^2 - 5x + 3 = 0$ S=$\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{3}{2} \; ou \; x = 1\right\}$;
- $x^2 + 3x = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 0 \; ou \; x = -3\}$;
- $x^2 + 4x - 96 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = -12 \; ou \; x = 8\}$;
- $x^2 - 121 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = -11 \; ou \; x = 11\}$;
- $x^2 - 2x - 80 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 10 \; ou \; x = -8\}$;
- $x^2 + 3x - 70 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = -10 \; ou \; x = 7\}$;
- $x^2 - 81 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = -9 \; ou \; x = 9\}$;
- $x^2 - 12x = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 0 \; ou \; x = 12\}$.

10- Lista de exercícios:

(OBMEP - 2015) Soma constante:

a) João preencheu os quadrados da figura abaixo com números naturais, de modo que a soma de quaisquer três números de quadrados vizinhos fosse sempre 30. Determine o valor de x.

Figura 20 - ilustração da atividade (OBMEP – 2015).

2				x				3		

Resposta: Como a soma de três números consecutivos é sempre a mesma, se a, b, c e y estão escritos nessa ordem na fila, devemos ter $a = y$ pois:

$$a + b + c = b + c + y$$

$$a + b + c - b - c = y$$

$$a = y.$$

Assim, seguindo esse padrão de repetição a cada três quadrados, os vizinhos do número x devem ser 2 e 3 como indica a figura abaixo.

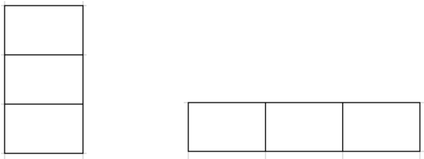
Figura 21 - Ilustração da atividade (OBMEP – 2015).

2		3	2	x	3	2		3	2

Como $2 + x + 3 = 30$, segue que $x = 25$.

b) Um triminó é uma peça formada por três quadradinhos em linha, como indicado nas figuras abaixo.

Figura 22 - Ilustração de um triminó (OBMEP – 2015).



No tabuleiro abaixo, a soma de quaisquer três números formando um triminó é sempre igual a 30. Determine o valor de x.

Figura 23 - Ilustração da atividade (OBMEP – 2015).

4							
						x	
			7				

Resposta: Repetindo o argumento do item anterior, na figura abaixo, podemos concluir que:

$$a + b + c \ = b + c + d$$

$$a + b + c - b - c = d$$

$$a = d.$$

a
b
c
d

a	b	c	d

Consequentemente, quaisquer dois quadradinhos, separados por outros dois em uma mesma linha ou coluna, são iguais. Podemos então preencher dois vizinhos de x com os números sublinhados abaixo:

Figura 24 - Ilustração da atividade (OBMEP – 2015).

4			$\underline{4}$			$\underline{4}$	
						x	
						$\underline{7}$	
			7			$\underline{7}$	

Finalmente, analisando a soma de um triminó com x no meio, temos $4 + 7 + x = 30$ e $x = 19$.

(OBMEP - 2015) A figura 1, representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa 40 g, quanto pesa o retângulo?

Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.

Figura 25 - Equilíbrio de massas.

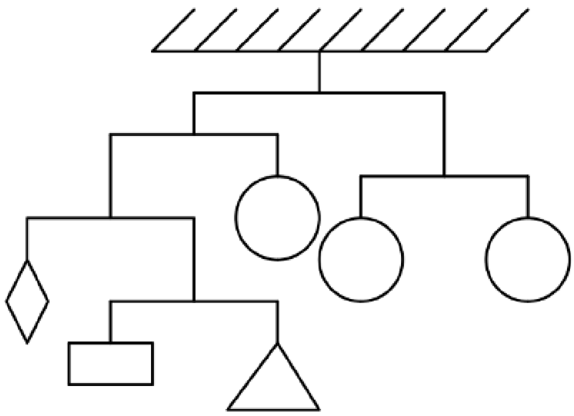


Figura 1.

Resposta: Seja x o peso do retângulo. Como o retângulo e o triângulo estão em equilíbrio, o peso do triângulo também é x. Analisando o equilíbrio do conjunto que envolve o losango, o retângulo e o triângulo, podemos concluir que o peso do losango é $x + x = 2x$. Como o peso do círculo deve ser igual ao peso do conjunto formado pelo losango, o retângulo e o triângulo, podemos concluir que o seu peso vale $x + x + 2x = 4x$. Finalmente, dado que $4x = 40$g, temos $x = 10$g.

(OBMEP - 2015) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 5$.

Resposta:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10} &= 5\\
(\sqrt{x^2-6x+10})^2 &= (5-\sqrt{x^2+9})^2\\
x^2-6x+10 &= 25-10\sqrt{x^2+9}+x^2+9\\
10\sqrt{x^2+9} &= 6x+24\\
25(x^2+9) &= (3x+12)^2\\
25x^2+225 &= 9x^2+72x+144\\
16x^2-72x+81 &= 0\\
(4x-9)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $4x-9=0$, ou seja, $x=\frac{9}{4}$. Para verificar que $x=\frac{9}{4}$ é a solução, basta escrever:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+10} &= \sqrt{\frac{81}{16}+9}+\sqrt{\frac{81}{16}-6\cdot\frac{9}{4}+10}\\
&= \frac{15}{4}+\frac{5}{4}\\
&= 5.
\end{aligned}$$

(OBMEP - 2015) Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

Resposta: Sejam x o número de pulos de 9m e y o número de pulos de 8m. Queremos determinar $x + y$, sabendo que:

$$\begin{aligned}
100 &= 9x+8y\\
&= 8(x+y)+x.
\end{aligned}$$

Como 100 deixa resto 4 na divisão por 8, o mesmo deve ocorrer com o número $8(x+y)+x$. Ou seja, x deve deixar resto 4 na divisão por 8 pois $8(x+y)$ já é múltiplo de 8. Se $x > 4$, saberemos que x é pelo menos $8 * 1 + 4 = 12$ que é o próximo número que deixa resto 4 por 8 depois de 4. Se o grilo der 12 pulos de 9 m, ele chegará a $9 * 12 = 108$ m e cairá do penhasco. Logo, $x = 4$ e após sua substituição na equação acima, podemos concluir que $y = \frac{(100-9)*4}{8} = 8$. Portanto, o grilo deve dar $4+8 = 12$ pulos.

(OBMEP - 2015) Pesando Moedas

a) João possui três moedas e uma balança de dois pratos. Ele sabe que exatamente uma das moedas é mais leve que as demais, sendo que as outras duas possuem o mesmo peso. Como ele pode descobrir qual é a moeda mais leve com uma única pesagem?

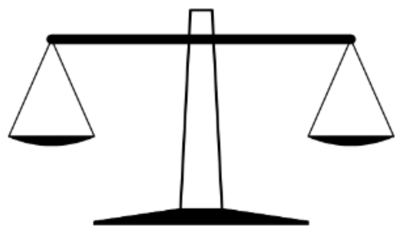
Resposta: Ele deve escolher duas moedas quaisquer e colocar na balança. Se a balança ficar equilibrada, a moeda não escolhida é a leve. Se a balança não ficar equilibrada, então o prato mais alto indicará a moeda mais leve.

b) João agora possui nove moedas e ele sabe novamente que somente uma delas é mais leve que as demais. Como ele pode descobrir a moeda mais leve com exatamente duas pesagens, se as demais possuem o mesmo peso?

Resposta: Basta ele dividir as 9 moedas em três grupos de três e pesar dois quaisquer desses grupos. Se a balança ficar equilibrada, ele saberá que a moeda mais leve está no grupo não escolhido. Se ela não ficar equilibrada, a moeda mais leve estará no prato mais alto. Em qualquer caso, ele pode restringir a busca para um grupo de três moedas. Pelo item anterior, com apenas mais uma pesagem ele descobrirá a moeda mais leve.

c) João juntou mais duas moedas normais à sua coleção e passou a ter 11 moedas. Depois de juntá-las, ele não conseguia lembrar quais eram as moedas novas. Como ele poderá agora descobrir a mais leve com três pesagens?

Figura 26 - Balança de pratos.



Resposta: Uma maneira seria ele dividir as moedas em três grupos contendo as quantidades: 5, 5 e 1. Após realizar uma pesagem entre os primeiros dois grupos, caso a balança fique equilibrada, ele saberá que a moeda mais leve é a do último grupo. Caso contrário, ele deve agora dividir o grupo de 5 moedas do prato mais alto em três com as seguintes quantidades: 2, 2 e 1.

Efetuando-se uma pesagem com os dois primeiros grupos, caso o prato fique equilibrado, ele saberá que a mais leve é a moeda do último grupo. Caso contrário, basta ele efetuar a última pesagem entre as moedas do prato mais alto.

Existem ainda outras maneiras. Por exemplo, divida as moedas em quatro grupos com as quantidades: 3, 3, 3 e 2. Uma pesagem no último grupo, fornece de imediato a moeda mais leve caso a balança fique desequilibrada ou indica que as duas são normais possibilitando o descarte de tal grupo da busca. Assim, bastaria encontrar a moeda mais leve nos outros três grupos com duas pesagens repetindo o procedimento descrito no item b).

(OBMEP - 2012) Um “matemágico” faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: “Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número do cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

some 1, se o cartão for verde;

some 2, se o cartão for amarelo;

some 3, se o cartão for azul;

some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu.”

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

Resposta: Para saber o número que deve dizer ao matemágico, Joãozinho deve fazer quatro contas:

1ª conta: multiplicar o número no cartão escolhido por 2;

2ª conta: somar 3 ao resultado da primeira conta;

3ª conta: multiplicar por 5 o resultado da segunda conta;

4ª conta: somar 1, 2, 3 ou 4 ao resultado da terceira conta, dependendo da cor do cartão escolhido. Como o número no cartão escolhido por Joãozinho foi 3, o resultado da primeira conta é $3 \times 2 = 6$; o resultado da segunda conta é $6 + 3 = 9$ e o da terceira é $9 \times 5 = 45$. Por fim, como a cor do cartão escolhido por Joãozinho é vermelha, o resultado da quarta e última conta é $45+4 = 49$. Assim Joãozinho deve dizer “quarenta e nove” ao matemágico.

b) Mariazinha disse “setenta e seis” para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

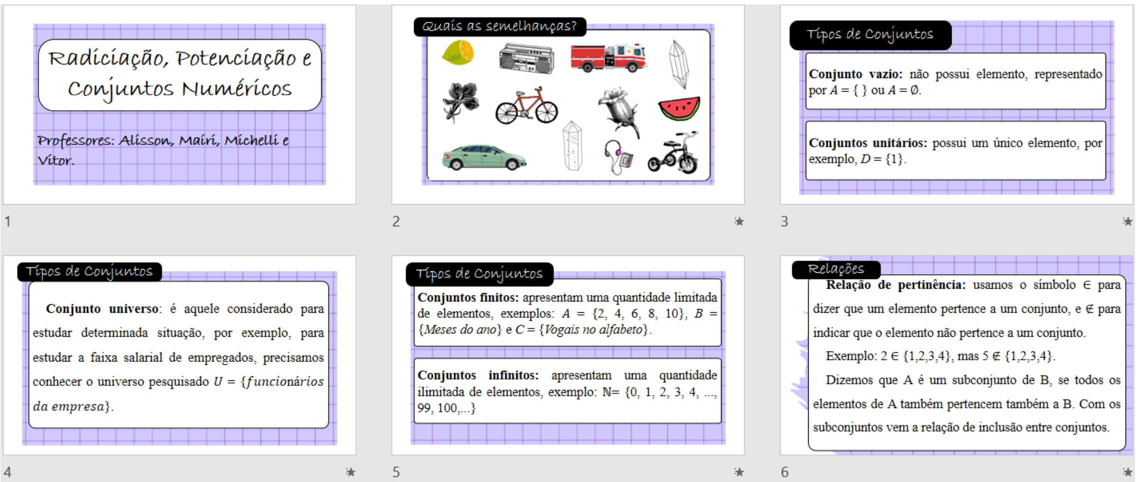
Resposta: Seja x o número de um cartão; então o número dito ao matemágico é $5(2x + 3) + y = 10x + 15 + y$, onde y é um número inteiro de 1 a 4 correspondendo à cor do cartão. Temos aqui $10 + 15 + y = 76$, ou seja, $10x + y = 61$. Como o dígito das unidades de $10x$ é 0, vemos que y só pode ser 1; logo $10x = 60$ donde $x = 6$ e concluímos que o cartão escolhido foi o 6 verde.

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse “sessenta e um” e o matemágico respondeu “Você errou alguma conta”. Explique como o matemágico pôde saber isso.

Resposta: Quando Pedrinho disse 61 ao matemágico, ele pensou assim: se as contas de Pedrinho estiverem corretas, o cartão deve ser verde (pois o algarismo das unidades de 61 é 1) e depois da terceira conta o número obtido foi 61 − 1 = 60, depois da segunda conta o número obtido foi 60 ÷ 5 = 12, depois da primeira conta o número obtido foi 12 − 3 = 9 e então o número no cartão deve ser 9 ÷ 2 = 4, 5, o que não pode acontecer pois os números nos cartões são números inteiros. Logo Pedrinho deve ter errado alguma conta.

Slides

Figura 27 - Slides utilizados em aula.



Relações

Relação de inclusão: Usamos o símbolo $\subset$ para dizer que um conjunto está contido em outro, ou seja, $A \subset B$, significa que todos os elementos do conjunto A vai estar no conjunto B. Já o símbolo $\supset$ indica que um conjunto contém outro, ou seja, $A \supset B$ indica que A contém todos os elementos de B.

Exemplo: $B = \{Meses\ do\ ano\}$ e $A = \{Meses\ com\ 30\ dias\}$, temos que $B \supset A$ e $A \subset B$.

7

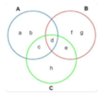
Por que diagrama de Venn?

John Venn

- John Venn (1834-1923). Matemático Britânico.
- Estudando técnicas lógicas e a teoria da probabilidade, desenvolveu uma forma de representação gráfica das intersecções e uniões dos conjuntos, através de diagramas que levaram seu nome.

8

O que é o diagrama de Venn?



- É uma maneira de apresentar graficamente os conjuntos. Nele construímos uma linha fechada, inserindo em seu interior os elementos.
- A ideia é facilitar o entendimento nas operações básicas de conjuntos como; Relação inclusão e pertinência, união e intersecção, diferença e conjunto complementar.

9

Operações com conjuntos

União de conjuntos: Usando o símbolo $\cup$, dizemos que $A \cup B$, representa a união dos elementos do conjunto A com os de B, ou seja, a união dos conjuntos é a junção de seus elementos.

10

Exemplo

a) $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$, $A \cup B =?$

b) $C = \{1,2\}$ e $D = \{2,3\}$, $C \cup D = ?$

c) $E = \{1,2\}$ e $F = \{1,2,3,4\}$, $E \cup F = ?$

11

Operações com conjuntos

Interseção de conjuntos: Usando o símbolo $\cap$, dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B.

12

Exemplo

a) $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$, $A \cap B =?$

b) $C = \{1, 2\}$ e $D = \{3, 4\}$, $C \cap D = ?$

c) $E = \{1, 2\}$ e $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $E \cap F = ?$

13

Exercício

(PUC-Rio-2005) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam B e 2 pessoas não usam A, qual é o número de pessoas que utilizam A e B?

14

Exercício

(ENEM 2020) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são

15

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

16

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a?

17

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$):

Chamamos de conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) o seguinte conjunto:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$.

E chamamos de $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos:

$\mathbb{N}^* = \{1,2,3, \dots\}$.

Nesse conjunto, podemos definir duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação.

18

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$):

Chamamos de conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) o seguinte conjunto:

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Nesse conjunto, temos três subconjuntos notáveis:

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$,

os interos não nulos;

$\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3, \dots\} = \mathbb{N}$,

19

Conjuntos Numéricos

o conjuntos dos inteiros não negativos.

$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2 - 1, 0\}$,

os inteiros não positivos.

No conjunto dos números inteiros podemos definir além das operações dos naturais, a operação de subtração.

Observe que todo número natural é inteiro, por isso escrevemos:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Lê-se: "$\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$".

20

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$): O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é composto pelos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. O conjunto dos racionais também possui três subconjuntos: racionais não nulos, racionais não negativos e não positivos, respectivamente $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{Q}_-$.

E no conjunto dos números racionais podemos definir a operação de divisão, além das demais operações.

21

Conjuntos Numéricos

Representação decimal: Note que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Nessa passagem podem ocorrer dois casos:

1º- O número decimal tem uma quantiade finita de algarismos, uma decimal exata. Por exemplo:

$$\frac{3}{1} = 3; \frac{1}{2} = 0{,}5; \frac{1}{20} = 0{,}05; \frac{27}{1000} = 0{,}027$$

22

Conjuntos Numéricos

2º- O número decimal tem uma quantidade infinita da algarismos que se repetem periodicamente, uma dízima periódica. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\dots = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{11}{6} = 1{,}8333\dots = 1{,}8\overline{3}$$

$$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\dots = 0{,}\overline{285714}$$

23

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$):

Números cuja representação decimal possuem infinitas casas decimais não periódicas, são chamados de irracionais. Por exemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\dots$$

$$\pi = 3{,}14159\dots$$

24

7.2 Material entregue aos alunos

Figura 28 - Material entregue aos alunos.

PROMAT

Equações

- **Questão**

(OBMEP 2019) - Paulinho tem peças com cinco formas diferentes (cubos, pirâmides, esferas, cilindros e cones). Peças com a mesma forma têm o mesmo peso (massa). Ele coloca algumas peças numa balança de pratos e observa o equilíbrio nas duas situações abaixo.

a) Indique se as figuras abaixo representam situações certas ou erradas.

b) Qual das figuras abaixo representa a situação correta?

Figura A Figura B

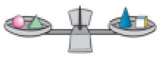
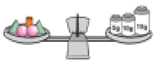


Figura C

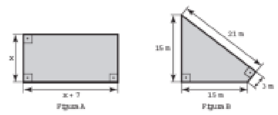
c) Com alguns pesos conhecidos, Paulinho observou a situação de equilíbrio abaixo. Quanto pesam, juntos, um cubo, uma pirâmide, uma esfera, um cilindro e um cone?



Equações do 2° Grau

- **Questão**

(Questão 31-Enem 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.



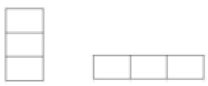
Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a?

Atividades de revisão

(OBMEP - 2015) Soma constante: a) João preencheu os quadrados da figura abaixo com números naturais, de modo que a soma de quaisquer três números de quadrados vizinhos fosse sempre 30. Determine o valor de x.

2				x				3		

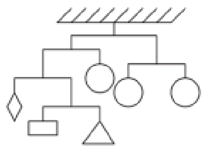
b) Um triminó é uma peça formada por três quadradinhos em linha, como indicado nas figuras abaixo.



No tabuleiro abaixo, a soma de quaisquer três números formando um triminó é sempre igual a 30. Determine o valor de x.

4							
						x	
			7				

(OBMEP - 2015) A figura 1, representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa 40 g, quanto pesa o retângulo? Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.



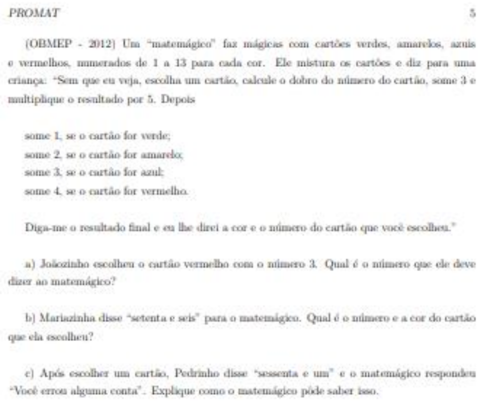
(OBMEP - 2015) Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

(OBMEP - 2015) Pesando Moedas

a) João possui três moedas e uma balança de dois pratos. Ele sabe que exatamente uma das moedas é mais leve que as demais, sendo que as outras duas possuem o mesmo peso. Como ele pode descobrir qual é a moeda mais leve com uma única pesagem?

b) João agora possui nove moedas e ele sabe novamente que somente uma delas é mais leve que as demais. Como ele pode descobrir a moeda mais leve com exatamente duas pesagens, se as demais possuem o mesmo peso?

c) João juntou mais duas moedas normais à sua coleção e passou a ter 11 moedas. Depois de juntá-las, ele não conseguia lembrar quais eram as moedas novas. Como ele poderá agora descobrir a mais leve com três pesagens?



PROMAT 5

(OBMEP - 2012) Um "matemágico" faz mágicas com cartões verdes, amarelos, azuis e vermelhos, numerados de 1 a 13 para cada cor. Ele mistura os cartões e diz para uma criança: "Sem que eu veja, escolha um cartão, calcule o dobro do número do cartão, some 3 e multiplique o resultado por 5. Depois

some 1, se o cartão for verde;
some 2, se o cartão for amarelo;
some 3, se o cartão for azul;
some 4, se o cartão for vermelho.

Diga-me o resultado final e eu lhe direi a cor e o número do cartão que você escolheu."

a) Joãozinho escolheu o cartão vermelho com o número 3. Qual é o número que ele deve dizer ao matemágico?

b) Mariazinha disse "setenta e seis" para o matemágico. Qual é o número e a cor do cartão que ela escolheu?

c) Após escolher um cartão, Pedrinho disse "sessenta e um" e o matemágico respondeu "Você errou alguma conta". Explique como o matemágico pôde saber isso.

7.3 Relatório

3° ENCONTRO (30/09/2023)

Sala A209

<u>Grupo de estagiários:</u> Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 30 de setembro de 2023 ocorreu o terceiro encontro do PROMAT. Nesse encontro, abordamos os conteúdos de equação de primeiro e segundo grau. Em relação de como iriamos lecionar a aula, decidimos realizar da mesma maneira do encontro anterior, desta maneira o Maíri e a Michelli iniciariam a aula com o conteúdo de equações de primeiro grau, logo em seguida seria abordado o conteúdo de equação de segundo grau ministrado pelo Vitor e pelo Alisson.

Iniciamos a aula corrigindo os exercícios da lista de revisão referente ao conteúdo do encontro passado, e antes de iniciarmos o conteúdo planejado, entregamos aos alunos uma questão da OBMEP de nível dois. A intenção era que eles revisitassem e utilizassem dos conceitos que já haviam visto nos seus anos escolares. Após o tempo determinado para a realização de tal atividade ter se esgotado, realizamos a correção minuciosa na lousa, para que assim os próximos conceitos que eles revisitariam tivesse melhor entendimento. Em seguida, trouxemos as relações de equivalência, para que entendam os processos que podemos realizar nos dois membros de uma equação, para que depois possam realizar sem muitas dificuldades as atividades propostas de equação de primeiro grau e de segundo grau.

Devido ao tempo que a explicação tomou, não foi possível realizar a atividade que estava em nosso plano de aula no momento para que estava destinada, então decidimos transferir esta atividade para o encerramento desta aula. Mas este pequeno deslize não nos prejudicou e seguimos normalmente com os conteúdos. Entregamos aos alunos uma questão sobre o conteúdo que iria ser estudado e a correção foi feita. Durante a explicação, abordamos a forma reduzida da equação de segundo grau, o que ocorreria se algum dos coeficientes fosse igual a zero, e falamos sobre três maneiras de se encontrar as raízes da equação, que são: Bhaskara, completar quadrados e por meio da soma e produto.

Assim que grande parte das dúvidas foram sanadas e as questões corrigidas, trouxemos a dinâmica do bingo das equações. Esse jogo está relacionado com equações de primeiro grau, é constituído por uma lista de setenta e cinco equações feitas por nós e verificadas pelos orientadores, cujos resultados continham respostas do vinte negativo até cinquenta e quatro. O intuito desta atividade era sortear uma equação, escrevê-la no quadro para que os alunos encontrassem a resposta, e assim que a resposta fosse encontrada, marcar na cartela caso houvesse o resultado a equação. Com esse jogo encerramos o terceiro encontro, onde percebemos a evolução que ambos tiveram. Nós melhoramos alguns aspectos da aula e os alunos mostraram domínio dos conteúdos revisados anteriormente e melhor compreensão dos conteúdos apresentados.

8. Encontro 4

8.1 Plano de Aula

PROMAT: Encontro 4 – 07/10

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Sistemas de equações.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Retomar conceitos das Equações do 2° grau e revisar as definições de sistemas lineares.

Objetivos específicos:

- Relembrar como se resolve as equações com uma ou duas incógnitas;
- Apresentar os três métodos para resolver sistemas lineares;
- Identificar qual tipo de equação está sendo trabalhada;
- Realizar cálculos de forma que a igualdade da equação seja mantida;
- Entender os conceitos matemáticos e conseguir solucionar as atividades.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, livro didático, lápis, borracha, caderno, notebook, projeção de slides, jogo do bingo para equações do 2° grau, atividades impressas e o aplicativo GeoGebra.

Encaminhamento metodológico:

1- Correção das tarefas do encontro anterior (30 min):

Nos primeiros minutos da aula, corrigiremos um ou dois exercícios deixados para tarefa de casa. Caso os alunos não solicitem um exercício específico, escolheremos algum deles.

2- Bingo com as equações do 2º grau (40 min):

Este jogo será semelhante ao bingo 1, porém para falar bingo é necessário preencher uma linha ou uma coluna. Será realizado com as equações do 2° grau, podendo ser possível resolver por Bhaskara ou soma e produto. Seguem as equações que serão passadas no quadro:

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -4 \; ou \; x = -1\}$;
2. $2x^2 - 6x - 8 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -1 \; ou \; x = 4\}$;
3. $x^2 - 5x + 6 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 2 \; ou \; x = 3\}$;
4. $-x^2 = -7x + 10$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 2 \; ou \; x = 5\}$;
5. $3x^2 - 18 = -15$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 1 \; ou \; x = 0\}$;
6. $-4x^2 + 8x - 4 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 1\}$;
7. $x^2 - 3x + 2 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 2 \; ou \; x = 1\}$;
8. $x^2 + 6x - 7 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -7 \; ou \; x = 1\}$;
9. $3x^2 - 27 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 3 \; ou \; x = -3\}$;
10. $x^2 - 4x - 5 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 5 \; ou \; x = -1\}$;
11. $7x^2 - 28 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 2 \; ou \; x = -2\}$;
12. $x^2 + 8x + 15 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -3 \; ou \; x = -5\}$;
13. $3x^2 + 2x - 1 = 0$ S=$\left\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{1}{3} \; ou \; x = -1\right\}$;
14. $x^2 + 12x + 36 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -6\}$;
15. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ S=$\left\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{3}{2} \; ou \; x = 1\right\}$;
16. $x^2 + 3x = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 0 \; ou \; x = -3\}$;
17. $x^2 + 4x - 96 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -12 \; ou \; x = 8\}$;
18. $x^2 - 121 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -11 \; ou \; x = 11\}$;
19. $x^2 - 2x - 80 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = 10 \; ou \; x = -8\}$;
20. $x^2 + 3x - 70 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -10 \; ou \; x = 7\}$;
21. $x^2 - 81 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R}/x = -9 \; ou \; x = 9\}$;

22. $x^2 - 12x = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 0 \; ou \; x = 12\}$.

23. $x^2 - 18x + 72 = 0$ S=$\{x \in \mathbb{R} / x = 6 \; ou \; x = 12\}$.

Figura 29 - Cartela do bingo.

B	I	N	G	O
π	-11	8	-4	π
5	-10	3	-7	6
-6	9	π	-1	0
7	-9	2	4	-2
π	12	-5	1	π

3- Feedback dos alunos sobre as aulas (10 min):

Entregaremos aos alunos as perguntas a seguir para responderem anonimamente sobre o que estão achando das aulas. Após responderem, passaremos uma caixinha de mesa em mesa para serem depositados.

- Você considera as atividades em um nível fácil, médio ou difícil?
- Você prefere que as aulas sejam: somente escrita no quadro? Somente em apresentação de slides? Passada no quadro e em slides?
- Os professores estão explicando de forma clara?
- As dinâmicas realizadas ajudam no aprendizado?
- Poderíamos executar as aulas de alguma outra forma?
- Estamos contribuindo para seu aprendizado?

Intervalo (20 min).

4- Sistemas Lineares (30 min):

Equações do 1º grau com duas incógnitas: toda equação que pode ser reduzida a uma equação equivalente na forma $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, $b \neq 0$, é denominada **equação do 1º grau com duas incógnitas**. São exemplos de equações do 1º grau com duas incógnitas: $x + y = 10$ e $3x + 2y = 16$.

Essas equações podem ter infinitas soluções, e cada uma delas pode ser representada por um **par ordenado** de números, em que o primeiro número representa o valor da incógnita x e o segundo representa o valor da incógnita y. Escrevemos da seguinte forma: (x, y).

Representação geométrica:

Podemos representar uma equação do 1º grau com duas incógnitas em um plano cartesiano. Inicialmente podemos escolher alguns valores para x e calculamos o valor de y correspondente. Dessa forma encontramos alguns pares ordenados que são solução dessa equação.

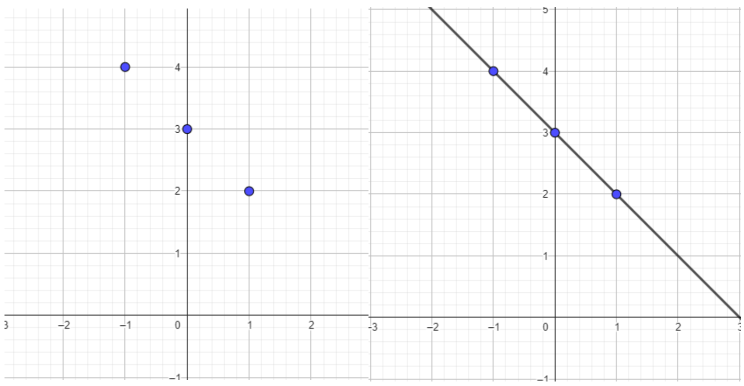
Vamos fazer isso para a equação $x + y = 3$.

Tabela 17 - Equações referentes à atividade.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	**Par ordenado** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
-1	$-1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4$	$(-1,4)$
0	$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3 + 0 = 3$	$(0,3)$
1	$1 + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$	$(1,2)$

Depois, indicamos os pares ordenados no plano cartesiano e traçamos a reta que passa pelos pontos.

Figura 30 - Ilustração da atividade no Geogebra.



Assim. a representação geométrica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é uma reta.

Sistemas de equações do 1º grau:

Vamos supor a seguinte situação: em um estacionamento há carros e motos, totalizando 14 veículos e 48 rodas. Quantos carros e motos há nesse estacionamento?

Para resolver essa questão podemos indicar:

- a quantidade de carros que há no estacionamento com x;
- a quantidade de motos que há no estacionamento com y;

Em seguida, com base nos dados do problema, montamos duas equações:

$$x + y = 14 \quad e \quad 4x + 2y = 48.$$

Quando duas equações são escritas ligadas pelo conectivo e, dizemos que há um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

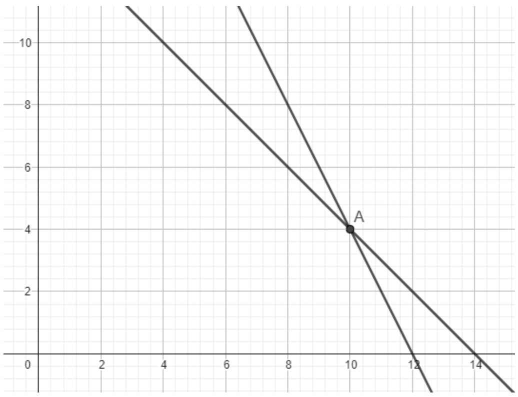
Esse problema também pode ser representado assim:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48. \end{cases}$$

Solução gráfica de um sistema:

Como vimos anteriormente, toda equação do 1º grau com duas incógnitas pode ser representada geometricamente. Então, uma forma de encontrar a solução do sistema, é por meio dessa representação.

Figura 31 - Ilustração da atividade no Geogebra.



Analisando a representação geométrica, conseguimos perceber que o ponto que as retas têm em comum é o $(10{,}4)$, ou seja, essa é a solução do sistema.

Método da substituição: agora, iremos resolver o mesmo exemplo utilizando o método da substituição. O sistema de equações era o seguinte:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48. \end{cases}$$

O primeiro passo para resolver o sistema é isolar a incógnita x em uma das equações. Façamos isso na primeira:

$$x + y = 14 \Rightarrow x = 14 - y.$$

O segundo passo é substituir esse x na outra equação, então ficamos com:

$$4x + 2y = 48,$$

$$4(14 - y) + 2y = 48,$$

$$56 - 4y + 2y = 48,$$

$$-2y = 48 - 56,$$

$$-2y = -8,$$

$$y = \frac{-8}{-2},$$

$$y = 4.$$

Agora descobrimos que a quantidade de motos é 4. Para descobrir a quantidade de carros substituímos y na primeira equação:

$$x + y = 14,$$

$$x + 4 = 14,$$

$$x = 14 - 4,$$

$$x = 10.$$

Assim temos que o número de carros é 10, e que a solução do sistema é o par ordenado $(10,4)$.

Método da adição: o método da adição consiste em adicionar ou subtrair as equações do sistema com o objetivo de eliminar uma das incógnitas. Tome como exemplo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 2x - 3y = 14. \end{cases}$$

Como as equações apresentam termos opostos, $+3y$ na primeira e $-3y$ na segunda, podemos adicionar as equações para obter uma única equação que contenha apenas a incógnita x.

$$(5x + 2x) + (3y - 3y) = (21 + 14),$$

$$7x = 35,$$

$$x = \frac{35}{7},$$

$$x = 5.$$

Agora para encontrar o valor de y devemos substituir x em uma das equações. Vamos substituir na primeira:

$$5x + 3y = 21,$$

$$5(5) + 3y = 21,$$

$$25 + 3y = 21,$$

$$3y = 21 - 25,$$

$$3y = -4,$$

$$y = -\frac{4}{3}.$$

Então temos que a solução do sistema é o par ordenado $\left(5, -\frac{4}{3}\right)$.

Mas e em situações em que não temos termos opostos? No problema dos carros e motos por exemplo, temos

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48. \end{cases}$$

Nesse caso, não conseguimos eliminar um dos termos apenas com uma adição, então, precisamos fazer uso do princípio multiplicativo de equivalência.

Primeiro, devemos selecionar uma das incógnitas, por exemplo a y. Na sequência, devemos observar os coeficientes dela em cada uma das equações, $+1$ na primeira e $+2$ na segunda. Agora, para deixar os termos de y opostos, precisamos multiplicar a primeira equação, $x + y = 14$, pelo coeficiente de y da segunda equação, 2, e precisamos multiplicar a segunda equação, $4x + 2y = 48$, pelo coeficiente de y da primeira equação, 1. Como o sinal dos coeficientes é o mesmo, uma das multiplicações deve ser feita com o sinal trocado:

$$\begin{cases} x + y = 14\big(* (-2)\big) \\ 4x + 2y = 48(* 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -28 \\ 4x + 2y = 48. \end{cases}$$

Assim, com os termos opostos, podemos realizar a adição em ambos os lados da equação para eliminar esses termos:

$$(-2x + 4x) + (-2y + 2y) = (-28 + 48),$$

$$2x = 20,$$

$$x = \frac{20}{2},$$

$$x = 10.$$

Com o x encontrado, podemos substituir em uma das equações do sistema, vamos utilizar a primeira:

$$x + y = 14,$$
$$10 + y = 14,$$
$$y = 14 - 10,$$
$$y = 4.$$

Então temos que o resultado do sistema é o par ordenado $(10,4)$.

Método da comparação: nesse método isolamos a mesma variável em ambas as equações e as comparamos. Vamos utilizar ainda o primeiro exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 4x + 2y = 48. \end{cases}$$

Isolando a incógnita x nas duas equações,

$$x + y = 14 \Rightarrow x = 14 - y,$$
$$4x = 2y = 48 \Rightarrow 4x = 48 - 2y \Rightarrow x = 12 - \frac{y}{2}.$$

Agora, podemos comparar cada um dos lados das equações $x = 14 - y$ e $x = 12 - \frac{y}{2}$:

$$x = x,$$
$$14 - y = 12 - \frac{y}{2}.$$

Em seguida, resolvemos a segunda equação:

$$14 - y = 12 - \frac{y}{2},$$
$$-y + \frac{y}{2} = 12 - 14,$$
$$\frac{-2y + y}{2} = -2,$$
$$-y = -2 * 2,$$
$$-y = -4 \Rightarrow y = 4.$$

Agora substituímos y em uma das equações originais:

$$x + y = 14 \Rightarrow x + 4 = 14 \Rightarrow x = 14 - 4 \Rightarrow x = 10.$$

Então, temos que o resultado do sistema é o par ordenado $(10,4)$.

5- Exemplos de aplicação de métodos de Sistemas (30 min):

Desenvolveremos no quadro alguns exemplos de aplicação dos três métodos comentados.

Método da substituição:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{cases}$ $S = (14, 6)$.

b) $\begin{cases} 3x - y = 18 \\ x + y = 10 \end{cases}$ $S = (7, 3)$.

c) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 3y = -26 \end{cases}$ $S = (-5, 7)$.

Método da adição:

a) $\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 18 \end{cases}$ $S = (25\,,7)$.

b) $\begin{cases} 8x + 5y = 11 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ $S = (2, -1)$.

c) $\begin{cases} 6x - 3y = 20 \\ 4x + 3y = 40 \end{cases}$ $S = \left(6, \frac{16}{3}\right)$.

Método da comparação:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ $S = (3{,}4)$.

b) $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x - 3y = -80 \end{cases}$ $S = (-8{,}24)$.

c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$ $S = (-7{,}18)$.

6- Atividades sobre Sistemas (40 min):

1- Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x + 5y = 11 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x - 10y = 12 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

Respostas:

Podemos utilizar qualquer um dos métodos para resolver esse sistemas, nesse exercício iremos utilizar o método da soma:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ (2x + y) * (-2) = 17 * (-2) \end{cases}$

$$(3x + 2y) + (-4x - 2y) = 29 + (-34)$$

$$-x * (-1) = -5 * (-1)$$

$$x = 5$$

Substituindo o valor de x em $2x + y = 17$ temos:

$$2 * 5 + y = 17$$

$$10 + y = 17$$

$$y = 17 - 10$$

$$y = 7$$

Solução do sistema (5,7).

Será repetido o mesmo processo para os outros sistemas.

b) $\begin{cases} (x\ +\ y) * (-1) =\ 10 * (-1) \\ \qquad 2x\ +\ y = 14 \end{cases}$

$$\big((-x) + (-y)\big) + (2x + y) = (-10) + 14$$

$$x = 4$$

Substituindo o valor de x em $x + y = 10$ temos:

$$x + y = 10$$

$$4 + y = 10$$

$$y = 10 - 4$$

$$y = 6$$

Solução: (4,6).

c) $\begin{cases} \qquad 8x\ +\ 5y =\ 11 \\ (4x\ +\ 5y) * (-1) = 3 * (-1) \end{cases}$

$$(8x + 5y) + \big((-4x) + (-5y)\big) = 11 + (-3)$$

$$4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

Substituindo o valor de x em $4x + 5y = 3$ temos:

$$4x + 5y = 3$$

$$4 * 2 + 5y = 3$$

$$8 + 5y = 3$$

$$5y = 3 - 8$$
$$5y = -5$$
$$y = \frac{-5}{5}$$
$$y = -1$$

Solução: (2,-1).

d) $\begin{cases} (3x\ -\ 2y) * (-3) =\ 6 * (-3) \\ (x\ -\ 3y) * 2 = 2 * 2 \end{cases}$

$$\big((-9x) + 6y\big) + \big(2x + (-6y)\big) = (-18) + 4$$
$$-7x = -14$$
$$x = \frac{-14}{-7}$$
$$x = 2$$

Substituindo o valor de x em $x - 3y = 2$ temos:

$$x - 3y = 2$$
$$2 - 3y = 2$$
$$-3y = 2 - 2$$
$$y = \frac{0}{-3}$$
$$y = 0$$

Solução: (2,0).

e) $\begin{cases} 8x\ -\ 10y =\ 12 \\ 4x\ -\ 5y = 3 \end{cases}$

Como uma linha é múltiplo da outra, não é possível encontrar uma solução para esse sistema. Essas retas são paralelas, ou seja, o sistemas não possui solução.

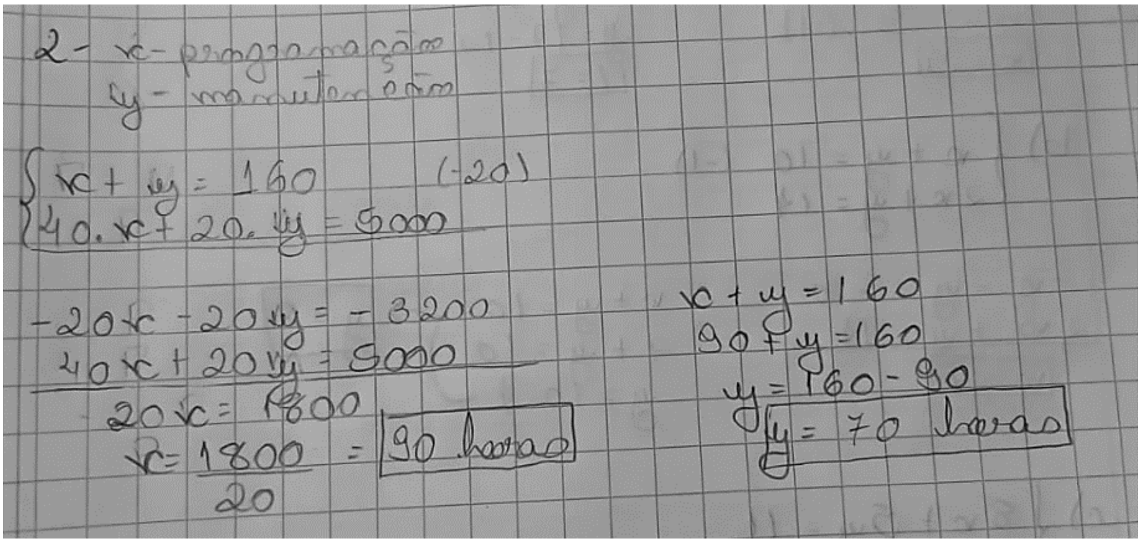
2- Maria trabalha na área de informática ganhando 40 reais por hora de programação e 20 reais por hora na manutenção de computadores. No mês passado, ela trabalhou 160 horas e ganhou R$5.000,00. Quantas horas Maria trabalhou em cada função?

Resposta:

Vamos chamar de x a quantidade de horas que Maria trabalhou programando e y será as horas que ela trabalhou na manutenção. Juntando as informações, conseguimos montar o seguinte sistema:

$$x + y = 16040x + 20y = 5000$$

Figura 32 - Solução da atividade.



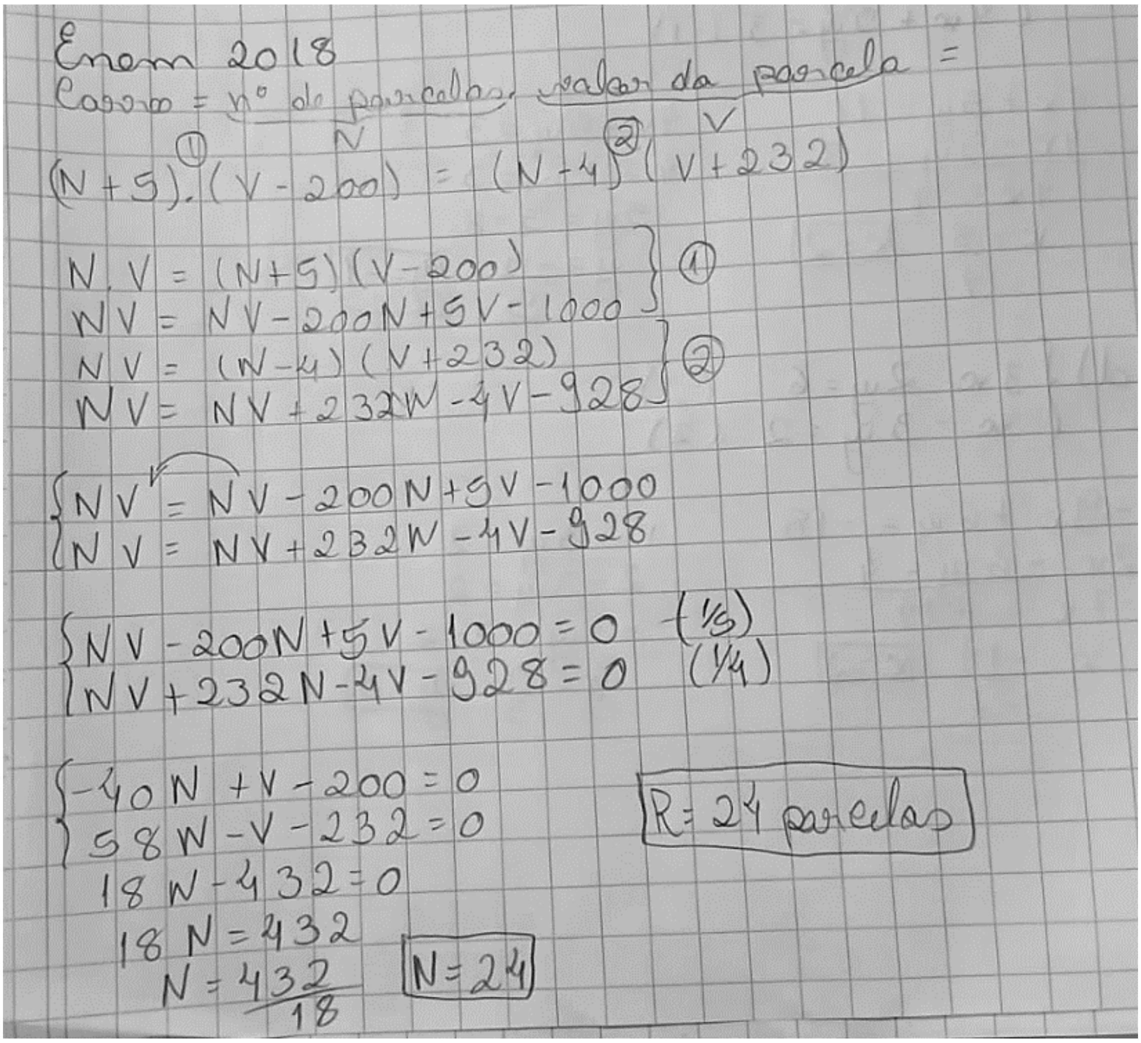
(ENEM/2018):

Uma loja vende automóveis em *N* parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade *N* de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

Resposta:

Figura 33 - Solução da atividade.

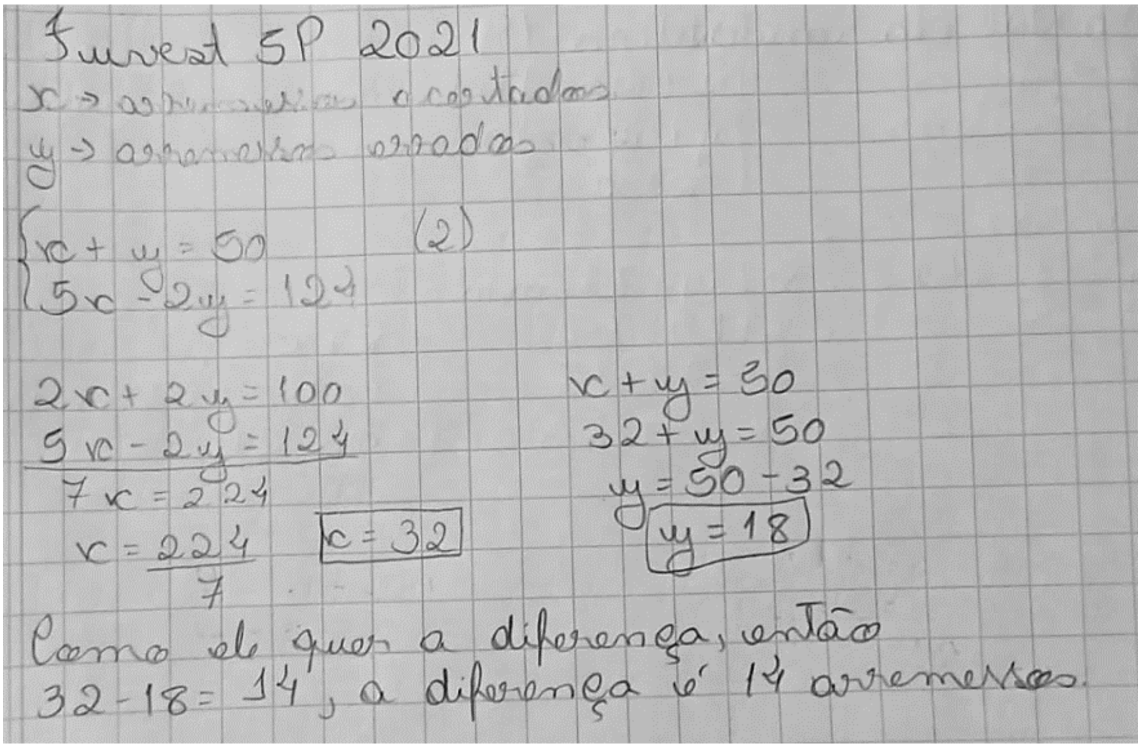


(Fuvest SP/2021):

Uma treinadora de basquete aplica o seguinte sistema de pontuação em seus treinos de arremesso à cesta: cada jogadora recebe 5 pontos por arremesso acertado e perde 2 pontos por arremesso errado. Ao fim de 50 arremessos, uma das jogadoras contabilizou 124 pontos. Qual é a diferença entre as quantidades de arremessos acertados e errados dessa jogadora?

Resposta:

Figura 34 - Solução da atividade.

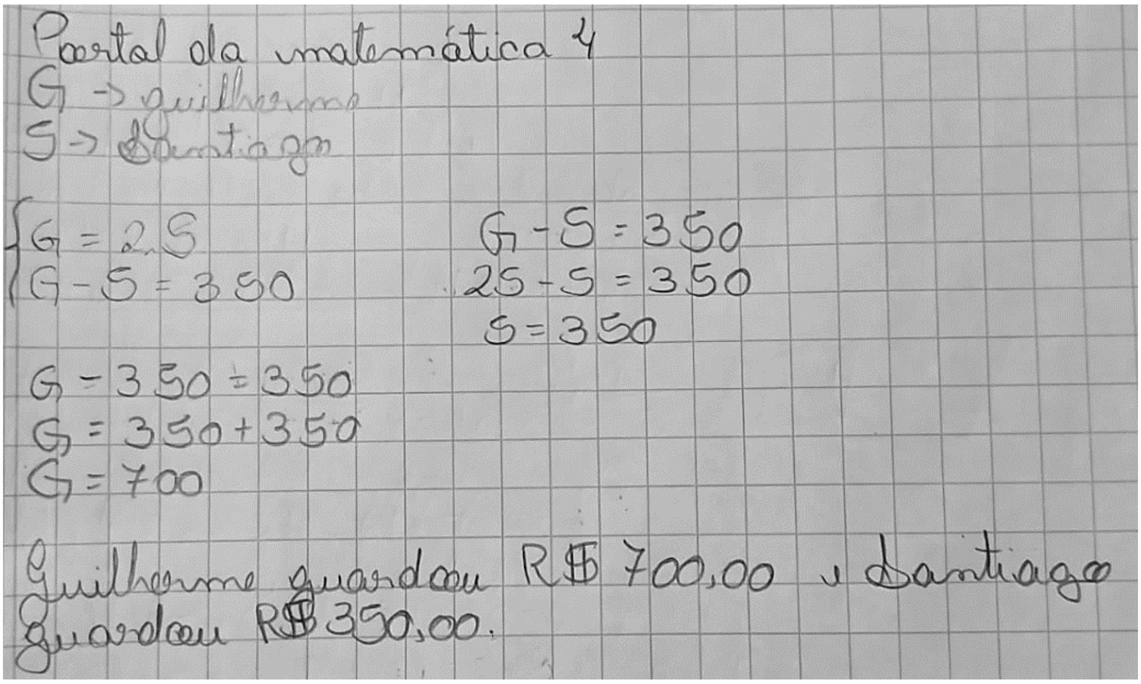


Exercício 4 (Portal da matemática):

Guilherme e Santiago juntaram suas economias para comprar um vídeo game. Guilherme conseguiu juntar o dobro da quantia de Santiago. Além disso, a diferença entre as economias de ambos é R$350,00. Quanto cada um conseguiu guardar?

Resposta:

Figura 35 - Solução da atividade.

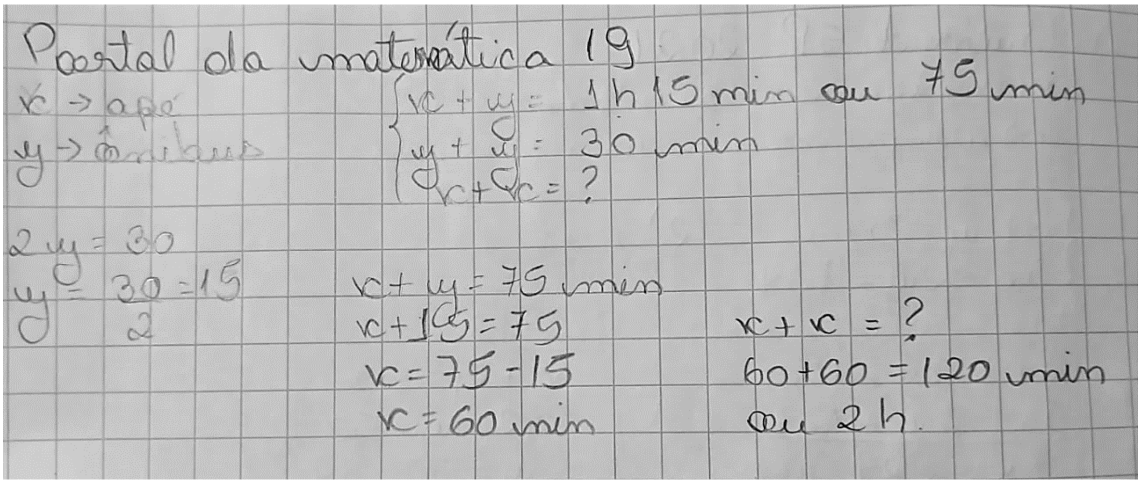


Exercício 19 (Portal da Matemática):

Quando João vai para a escola a pé e volta de ônibus, ele gasta uma hora e quinze minutos; quando vai e volta de ônibus, ele gasta meia hora. Para cada meio de transporte, o tempo gasto na ida é igual ao tempo gasto na volta. Quanto tempo ele gasta quando vai e volta a pé?

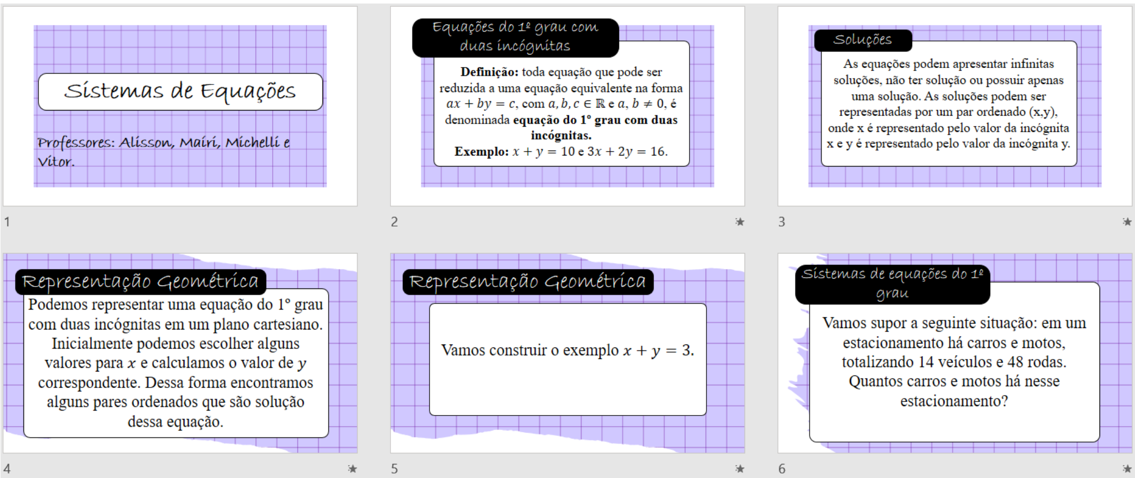
Resposta:

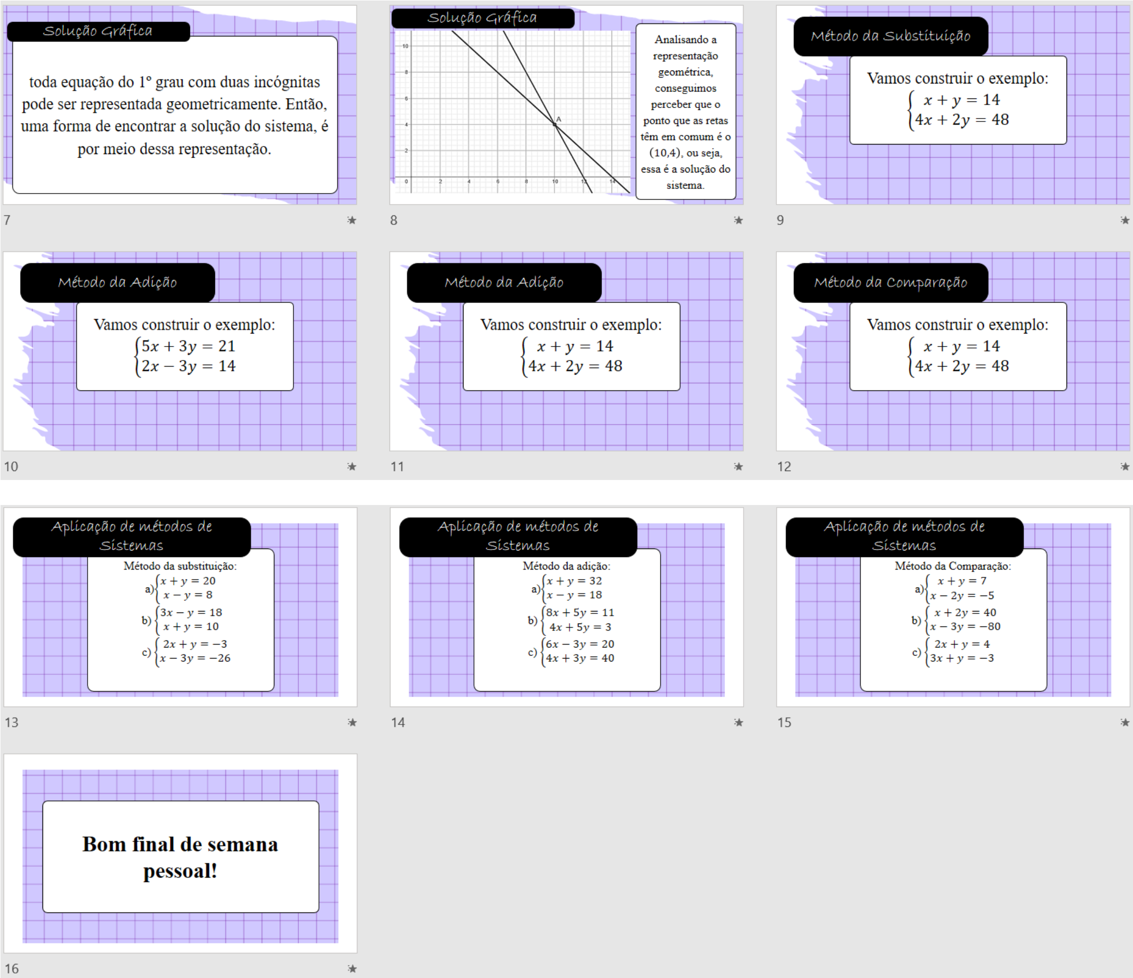
Figura 36 - Solução da atividade.



Slides

Figura 37 - Slides utilizados em aula.





8.2 Material entregue aos alunos

Figura 38 - Material entregue aos alunos.

PROMAT 1

PROMAT

Sistemas

- **Questões**

1- Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x + 5y = 11 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 8x - 10y = 12 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

2- Maria trabalha na área de informática ganhando 40 reais por hora de programação e 20 reais por hora na manutenção de computadores. No mês passado ela trabalhou 160 horas e ganhou R$ 5.000,00; ela gastou x horas programando e y horas arrumando os computadores. Quantas horas Maria trabalhou em cada função?

PROMAT 2

3- (ENEM/2018): Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações. Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

4- (Fuvest SP/2021): Uma treinadora de basquete aplica o seguinte sistema de pontuação em seus treinos de arremesso à cesta: cada jogadora recebe 5 pontos por arremesso acertado e perde 2 pontos por arremesso errado. Ao fim de 50 arremessos, uma das jogadoras contabilizou 124 pontos. Qual é a diferença entre as quantidades de arremessos acertados e errados dessa jogadora?

5- Guilherme e Santiago juntaram suas economias para comprar um vídeo game. Guilherme conseguiu juntar o dobro da quantia de Santiago. Além disso, a diferença entre as economias de ambos é R$ 350,00. Quanto cada um conseguiu guardar?

6- Quando João vai para a escola a pé e volta de ônibus, ele gasta uma hora e quinze minutos; quando vai e volta de ônibus, ele gasta meia hora. Para cada meio de transporte, o tempo gasto na ida é igual ao tempo gasto na volta. Quanto tempo ele gasta quando vai e volta a pé?

8.3 Relatório

4° ENCONTRO (07/10/2023)

Sala A209

Grupo de estagiários: Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 07 de outubro de 2023, ocorreu o quarto encontro do PROMAT. Iniciamos a aula corrigindo as questões da lista de revisão, a qual sempre traz questões relacionadas com os conteúdos vistos em sala. Assim que as dúvidas foram esclarecidas, optamos em trazer a dinâmica do bingo que foi realizada no encontrou anterior, só que nesse caso, o foco dessa atividade foram questões sobre equações do segundo grau.

O jogo ocorreu da mesma maneira da dinâmica anterior trabalhada, no entanto, nesse encontro, decidimos por aumentar seu tempo de duração, e essa decisão por nossa parte foi certeira. A maioria dos alunos se mostravam muito interessados e envolvidos com a atividade, e se mostraram mais animados com o decorrer da aula. Ao finalizar o bingo, entregamos aos alunos um questionário com seis perguntas e solicitamos aos alunos que respondessem as perguntas e que não precisariam se identificar. Tais perguntas eram relacionadas com a dificuldade do conteúdo, com a forma que estamos explicando, com a preferência de como se passar o conteúdo (slides, lousa ou ambos), com as dinâmicas que trouxemos, se elas auxiliam no aprendizado, entre outras perguntas nesse âmbito.

Assim que todos retornaram do intervalo, abordamos o conteúdo de sistemas de equações. Inicialmente, explicamos seu conceito e logo em seguida abordamos três métodos de solução de sistemas de equações lineares, que são: o método da substituição, o método da adição e o método da comparação. Tais métodos foram bem trabalhados e, com a interação dos alunos, cremos que não houve dúvidas em como executá-los. Dessa forma, foram dadas questões que utilizassem tais métodos, junto a isso, solicitamos que, em vez de fazerem em suas carteiras, viessem ao quadro resolvê-las e assim seguiu-se até o encerramento da aula.

No período da tarde, após as aulas, foram lidas as respostas do questionário de avaliação. Na média, os *feedbacks* que recebemos foram os seguintes: as atividades estão em um nível mediano; há uma preferência da utilização de slides e quadro; as explicações estão sendo feitas de forma clara, contudo às vezes é falado de forma rápida e, em outras ocasiões, os professores se atrapalham na explicação; em relação às dinâmicas, tivemos quase unanimidade pois elas ajudam a compreender melhor o conteúdo. Em um dos catões havia uma ideia dada por um dos discentes, virmos fantasiados no encontro de data mais próxima do *Halloween*, já que estamos perto desta festividade.

9. Encontro 5

9.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 5 – 14/10

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Funções do 1º grau.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Retomar conceitos das Funções do 1º grau e compreender a relação entre as variáveis dependente e independente.

Objetivos específicos:

- Relembrar como encontrar a lei de formação de uma função;
- Entender o papel de cada um dos coeficientes na função;
- Identificar domínio, contradomínio e imagem em gráficos e diagramas;
- Compreender a relação de dependência entre as variáveis.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, canetão, lápis, borracha, caderno, notebook, projeção de slides, proveta, água, bolinhas de gude de mesmo tamanho e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

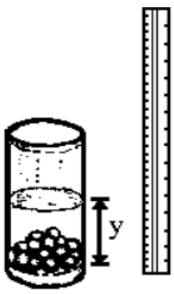
1- Correção dos Exercícios da Aula Anterior (30 min).

Iniciaremos a aula perguntando se os alunos desejam a resolução de alguma questão específica. Caso ninguém se manifeste, abordaremos até três questões da aula anterior.

2- Atividade das Provetas (60 min).

Separaremos os alunos em trios ou quartetos em que cada aluno recebe uma atividade impressa, e o grupo recebe uma proveta e seis bolinhas de gude (de mesmo tamanho). Para encher a proveta com água, os alunos podem usar a própria garrafinha de água que possuem. Pediremos aos alunos para encherem a proveta até o nível 60 ml. Na atividade impressa, terá uma tabela com duas colunas. Uma delas corresponde ao número de bolinhas e a outra coluna representa a medida em ml. A ideia é os alunos irem colocando uma bolinha por vez e irem identificando a relação existente neste processo, do tipo, existe uma relação de dependência? O nível da água em ml depende do número de bolinhas adicionadas? Quantas bolinhas precisaríamos colocar para atingir um nível de 185 ml por exemplo?

Figura 39 - Demonstração do experimento (atividade das provetas).



Vamos considerar um volume de água na proveta de 60 ml para iniciar o experimento. Utilizaremos a notação:

x- A quantidade de bolinhas como variável independente, medida em unidades.

y- O nível de água como variável dependente, medido em ml.

1) Inserir as bolinhas uma por vez e anotar os valores medidos em ml.

Tabela 18 - Experimento das provetas.

Quantidade de Bolinhas	**Nível da água (ml)**

Qual é a variável dependente? E a variável independente?

2) Construir um gráfico no plano cartesiano que represente esses pontos.

3) É possível escrever uma lei de formação para esta função?

4) Qual seria o conjunto domínio e o conjunto imagem?

5) Quantas bolinhas são necessárias para que a água atinja 185 ml?

6) Que altura seria atingida se colocássemos 25 bolinhas?

3- Definição de Função (25 min).

Como vimos no experimento anterior, o nível da água dentro da proveta depende da quantidade de bolinhas adicionadas. Se utilizarmos y para representar o nível da água e x para representar a quantidade de bolinhas, conseguimos construir uma sentença matemática que expresse essa relação, e, no nosso caso, é $y = 3x + 60$.

Podemos notar que o volume de água na proveta varia de acordo com a quantidade de bolinhas, e que as bolinhas podem variar de forma independente. Nota-se também que, para todas as quantidades de bolinhas estão associados volumes de água na proveta, e que cada bolinha está relacionada com um único volume de água. Com essas condições podemos dizer que o volume y de água está em função da quantidade x de bolinhas e que a sentença $y = 3x + 60$ é a **lei de formação** dessa função.

{**Lei de Formação** é a fórmula}

Quando se trata de funções, a letra ou símbolo que indica um valor numérico não é mais chamada de incógnita, como vimos nas equações. Nas funções, elas são chamadas de **variáveis**, e podemos dividi-las em duas categorias: as variáveis **independentes** e as variáveis **dependentes**. No exercício realizado, a variável independente é o x, representando a quantidade de bolinhas, e a variável dependente é o y, representando o volume de água.

A variável dependente também pode ser representada pela notação $f(x)$, em que f é uma função da qual a variável independente é x. Então, outra forma de escrever a lei de formação da função seria $f(x) = 3x + 60$.

Quando relacionamos duas variáveis por meio de uma função, precisamos estar atentos aos valores que as variáveis podem assumir na situação. Por exemplo, na atividade realizada, não faz sentido a variável x assumir valores negativos, visto que não é possível colocar uma quantidade negativa de bolinhas dentro da proveta.

O conjunto de valores que a variável x pode assumir é chamado de **domínio da função** e é indicado por $D(f)$. Já o conjunto dos possíveis valores que a variável dependente y pode assumir é denominado de **contradomínio** e podemos representar por $Cd(f)$. O valor da variável y correspondente a um determinado valor de x é chamado de **imagem** no número x dado pela função. Já o conjunto de todas as imagens obtidas pela função é denominado de **imagem da função** e é indicado por $Im(f)$.

Assim como nas equações, temos as funções de 1º grau com a variável x, e essas podem ser enquadradas em três grupos, não necessariamente distintos: Afim, Linear e Identidade.

Uma função é chamada de **função afim** quando é definida pela sentença matemática $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sendo a o coeficiente angular da função e b o coeficiente linear.

Quando uma função afim tem o coeficiente $b = 0$, a chamamos de **função linear**, e temos uma lei de formação da seguinte forma: $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Já, quando uma função linear tem $a = 1$, é denominada de **função identidade**, e é dada pela lei de formação $f(x) = x$ ou $y = x$.

4- Valores de uma Função (10 min).

O valor do número real x, para o qual $y = 0$ ou $f(x) = 0$, denomina-se **zero da função** ou **raiz da função**. Para encontrar esse número, empregamos o mesmo método utilizado para encontrar soluções de uma equação do 1º grau com uma incógnita.

Por exemplo, dada a função $f(x) = 2x + 3$, vamos encontrar $f(x) = 0$:

$$2x + 3 = 0,$$

$$2x = -3,$$

$$x = -\frac{3}{2}.$$

Assim, sabemos que, quando $x = -\frac{3}{2}$, $f(x) = 0$.

Quando desejamos encontrar uma imagem para determinado valor de x, basta apenas substituir os valores no lugar da variável independente.

Vamos utilizar a mesma função, $f(x) = 2x + 3$, e vamos encontrar as imagens para os valores $\left(-\frac{3}{2}; 0; 3\right)$. Primeiro, $x = -\frac{3}{2}$:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 3,$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{6}{2} + 3,$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -3 + 3,$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0.$$

Como podemos ver, a imagem de $-\frac{3}{2}$ é 0, ou seja, esse ponto é o zero da função. Agora vamos substituir x por 0:

$$f(0) = 2(0) + 3,$$

$$f(0) = 0 + 3,$$

$$f(0) = 3.$$

E agora substituiremos o valor 3:

$$f(3) = 2(3) + 3,$$

$$f(3) = 6 + 3,$$

$$f(3) = 9.$$

5- Gráfico de uma Função (15 min).

Utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, podemos representar graficamente uma função afim. Essa representação serve para nos dar todas as informações sobre como se comporta a função.

Um **plano cartesiano** é composto de duas retas que formam um ângulo de $90°$ entre si, sendo uma horizontal e outra vertical. Essas retas são denominadas de **eixos**, sendo a reta horizontal o eixo x, ou eixo das abscissas e a reta vertical o eixo y, ou eixo das ordenadas. O encontro dos dois eixos é a origem do sistema, o ponto $(0{,}0)$, e os valores nos eixos crescem para cima e para a direita e decrescem para os respectivos lados opostos.

Para traçar no plano cartesiano o gráfico de uma função afim, podemos encontrar algumas imagens obtidas para certos valores de x e então traçar uma reta. Lembrando que a reta só pode ser utilizada quando $D(f) \subset \mathbb{R}$ (o domínio da função está contido no Conjuntos dos Números Reais).

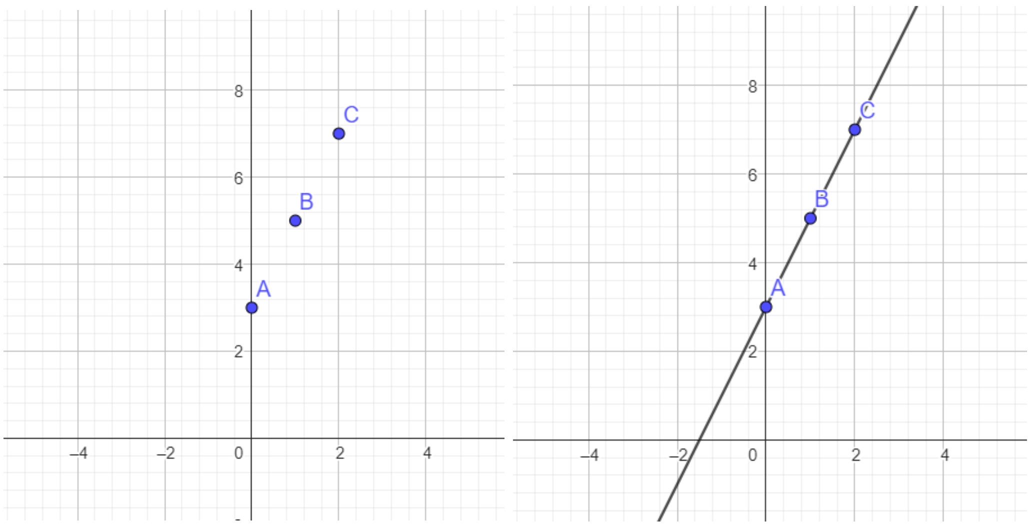
Exemplo: vamos construir o gráfico da função $y = 2x + 3$. Primeiro podemos obter algumas imagens da função:

Tabela 19 - Exemplo para montar o gráfico da função.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	$f(0) = 2(0) + 3 \Rightarrow f(0) = 0 + 3 \Rightarrow f(0) = 3$
1	$f(1) = 2(1) + 3 \Rightarrow f(1) = 2 + 3 \Rightarrow f(1) = 5$
2	$f(2) = 2(2) + 3 \Rightarrow f(2) = 4 + 3 \Rightarrow f(2) = 7$

Agora podemos construir o gráfico da função

Figura 40 - Gráfico da função.



Analisando o gráfico, é mais fácil entender o papel dos coeficientes da função. O coeficiente angular indica a tangente do ângulo formado na intersecção da reta com o eixo das abscissas, e o coeficiente linear indica onde é a intersecção com o eixo das ordenadas.

6- Diagrama de Flechas (30 min).

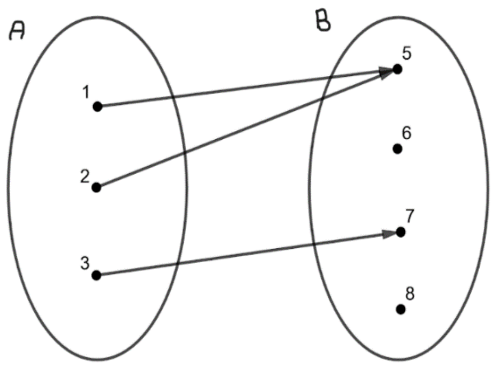
Relações: uma relação é uma associação entre elementos de dois conjuntos. É um subconjunto de um produto cartesiano.

Exemplo: Considere $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8\}$ e *R* uma relação entre o conjunto *A* e o conjunto *B*:

$$\mathrm{R} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$$

$R = \{(1, 5), (2, 5), (3, 7)\}$. Representando pelo diagrama de flechas, temos:

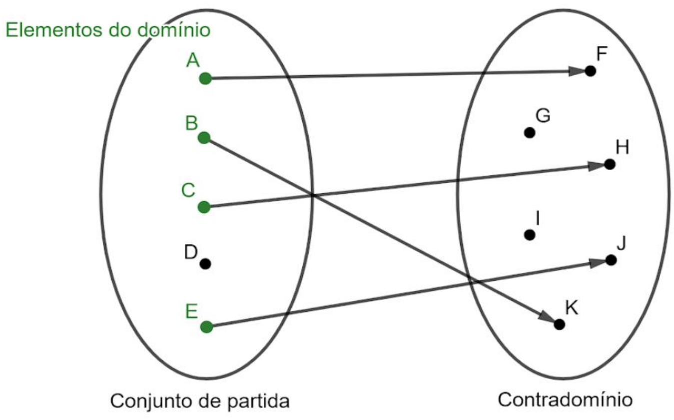
Figura 41 - Diagrama de flechas de uma relação.



O conjunto *A* de onde saem as flechas é chamado de conjunto de partida, e todos os elementos do conjunto *B* que recebem as flechas compõem o conjunto chamado de contradomínio.

Domínio: são todos os elementos do conjunto de partida que participam da relação (são os elementos de onde saem as flechas).

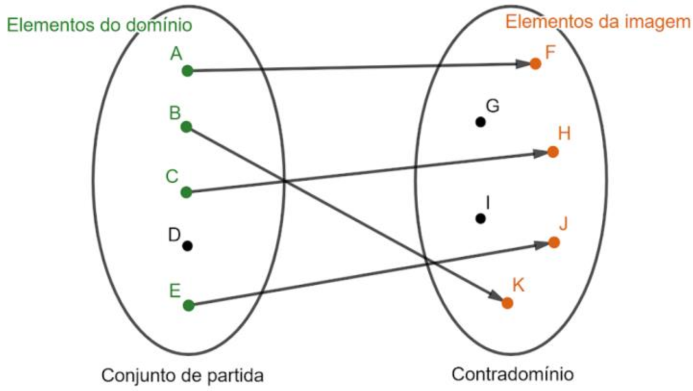
Figura 42 - Diagrama de flechas: domínio, contradomínio e conjunto de partida.



$D(R) = \{A, B, C, E\}$

Imagem: são todos os elementos do contradomínio que participam da relação (são os elementos que recebem flechas).

Figura 43 - Diagrama de flechas: imagem.

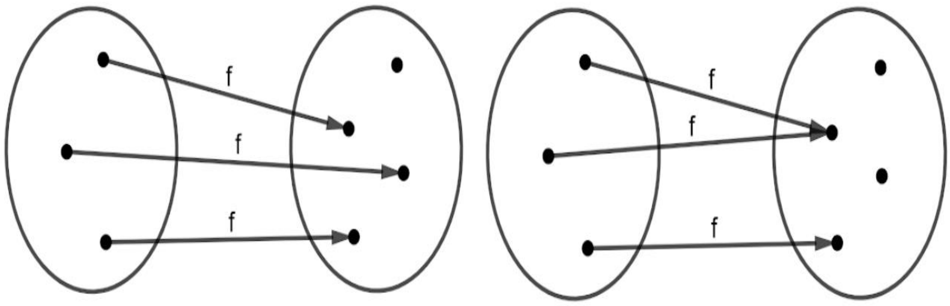


$R(Im) = \{F, H, J, K\}$

Funções: é uma relação especial entre dois conjuntos, que segue uma regra ou lei. Uma relação só será função se obedecer à lei vigente e se cada elemento do domínio estiver associado a um único elemento do contradomínio.

Exemplo 1:

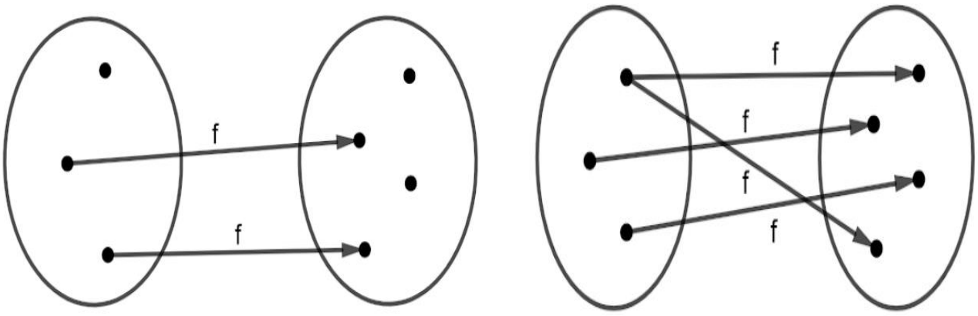
Figura 44 - Diagrama de flechas: exemplo se é ou não função.



Os diagramas de flecha acima representam uma função, pois todos os elementos do domínio estão ligados a um único elemento do contradomínio.

Exemplo 2:

Figura 45 - Diagrama de flechas: exemplo se é ou não função.



Os diagramas de flecha acima não representam uma função, pois existem elementos no domínio que não estão ligados a elementos do contradomínio e existem elementos do domínio que se relacionam com dois elementos do contradomínio.

(Atividades impressas)

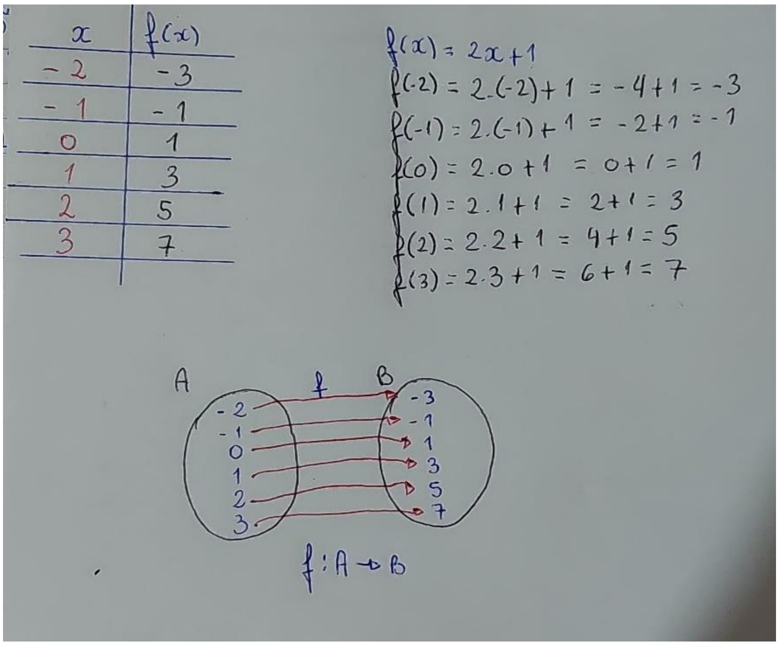
Os exercícios a seguir serão entregues aos alunos e resolvidos no quadro com a participação deles, aproveitando o momento para tirar as dúvidas.

Exercício 1:

Dado o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, faça um esquema representando por meio do diagrama de flechas, a função $f(x) = 2x + 1$.

Solução:

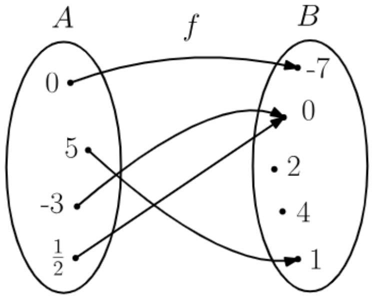
Figura 46 - Solução do exercício sobre funções.



Exercício 2:

O diagrama de flechas abaixo representa uma função f de *A* em *B*. Determine:

Figura 47 - Diagrama de flechas representando uma função.



a) $D(f) = \left\{0, 5, -3, \frac{1}{2}\right\}$

b) $Cd(f) = \{-7, 0, 2, 4, 1\}$

c) $Im(f) = \{-7, 0, 1\}$

d) $f(-3) = \{0\}$

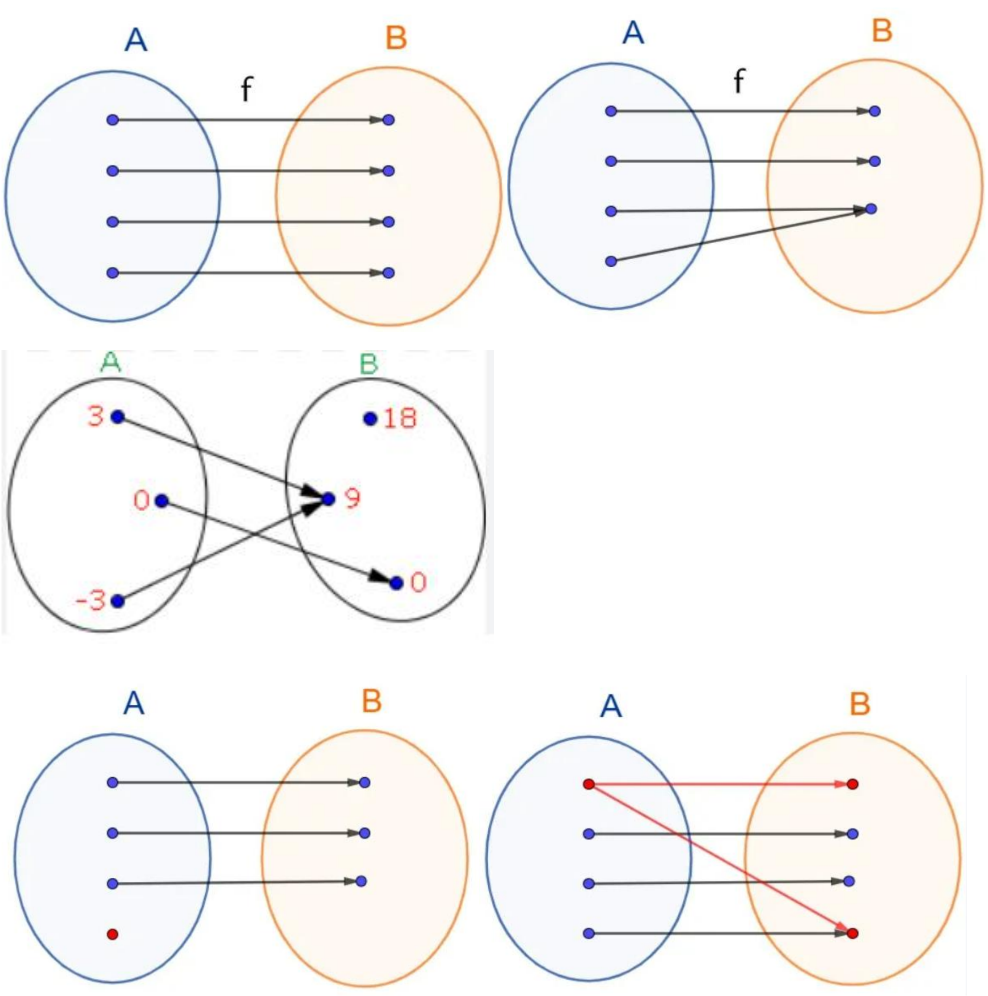
e) $f(5) = \{1\}$

f) $Se\ f(x) = -7, então\ x = \{0\}$

Relembrando. (slides)

Quais das imagens é função? E quais não são?

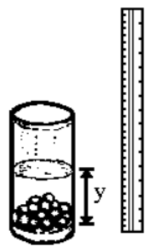
Figura 48 - Diagrama de flechas: É função?.



7- Atividades.

1- (Enem 2010- Adaptado). Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

Figura 49 - Atividade das provetas.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Tabela 20 - Atividade das provetas.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br

Determine a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x).

Solução:

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y1 - y2}{x1 - x2} = \frac{6{,}35 \ - \ 6{,}70}{5 \ - \ 10} = \frac{-\,0{,}35}{-\,5} = \ 0{,}07 \ ou \ \frac{7}{100}$$

$$6{,}35 = 0{,}07 * 5 + b$$

$$6{,}35 \ - \ 0{,}35 = b$$

$$b = 6$$

$$y = 0{,}07x + 6$$

2- Dados os conjuntos $A = -1{,}0{,}1{,}2$ e $B = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$ e a relação $R = (x, y) \in A \times B / y = x + 1$.

Determine:

a) Os pares ordenados da relação *R*.

b) O conjunto domínio e o conjunto imagem.

c) O diagrama de flechas.

d) O gráfico cartesiano.

Solução:

a) Inicialmente, vamos determinar os pares ordenados (x, y), através da lei de correspondência dos elementos: $y = x + 1$, onde $x \in A\ e\ y \in B$.

$x = -1 \rightarrow y = -1 + 1 = 0 \in B$, então $(-1, 0) \in R$

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 1 = 1 \in B$, então $(0, 1) \in R$

$x = 1 \rightarrow y = 1 + 1 = 2 \in B$, então $(1, 2) \in R$

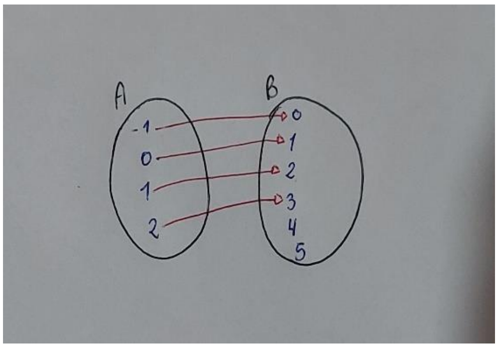
$x = 2 \rightarrow y = 2 + 1 = 3 \in B$, então $(2, 3) \in R$

R = {(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)}

b) $D = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Im = \{0,1,2,3\}$

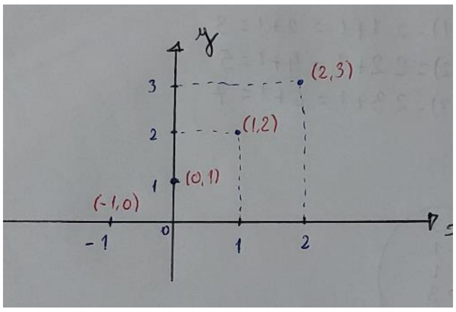
c) Diagrama de flechas.

Figura 50 - Solução do exercício: diagrama de flechas.



d) Gráfico cartesiano.

Figura 51 - Solução do exercício: gráfico cartesiano.



3- (Portal da Matemática - OBMEP) "Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra."(RevistaExame.21abr.2010.).

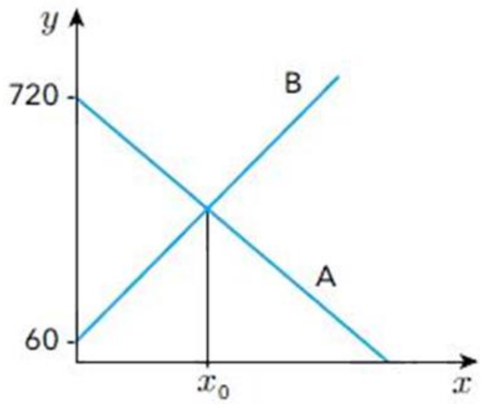
A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é?

Solução:

Sabemos que a função do primeiro grau é dada por $f(x) = ax + b$, em que b é a constante. Como a anuidade é um valor que se paga uma vez por ano e nunca varia de um ano para o outro, ela será nossa constante. Em seguida, temos que se o ciclista quiser estender seu tempo, ele deverá pagar 3 dólares por hora extra utilizada, ou seja, se ele utilizar 3 horas a mais durante o ano todo, ele irá pagar os 24 dólares mais 9 dólares das 3 horas utilizadas, ou ainda, se ele utilizar 20 horas a mais durante o ano todo, ele irá pagar os 24 dólares mais 60 dólares das 20 horas extras utilizadas. Como o valor pago pode mudar dependendo se ele vai utilizar mais ou menos horas extras, essa será nossa variável. Então a função que corresponde ao nosso problema é $f(x) = 3x + 24$.

4- (Portal da Matemática - OBMEP) O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.

Figura 52 - Ilustração da atividade: reservatório de água.



Solução:

Vamos analisar primeiro o reservatório de água A:

Ele perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, ou seja, conforme o tempo passa, mais água é perdida. Então, nossa variável aqui é igual à $-10x$.

Analisando o gráfico, temos que, quando o tempo x é 0, o reservatório tem 720 litros de água. Assim, pela definição, o 720 será nossa contante. Então a função de A é $f(x) = -10x + 720$.

Seguindo o mesmo raciocínio em B, temos que a função desse reservatório é $f(x) = 12x + 60$.

Como queremos descobrir o valor de x_0 e, a partir do gráfico percebemos que x_0 é igual em ambas as funções, basta igualá-las que encontraremos o valor de x_0.

$$-10x + 720 = 12x + 60$$

$$-10x - 12x = 60 - 720$$

$$-22x = -660$$

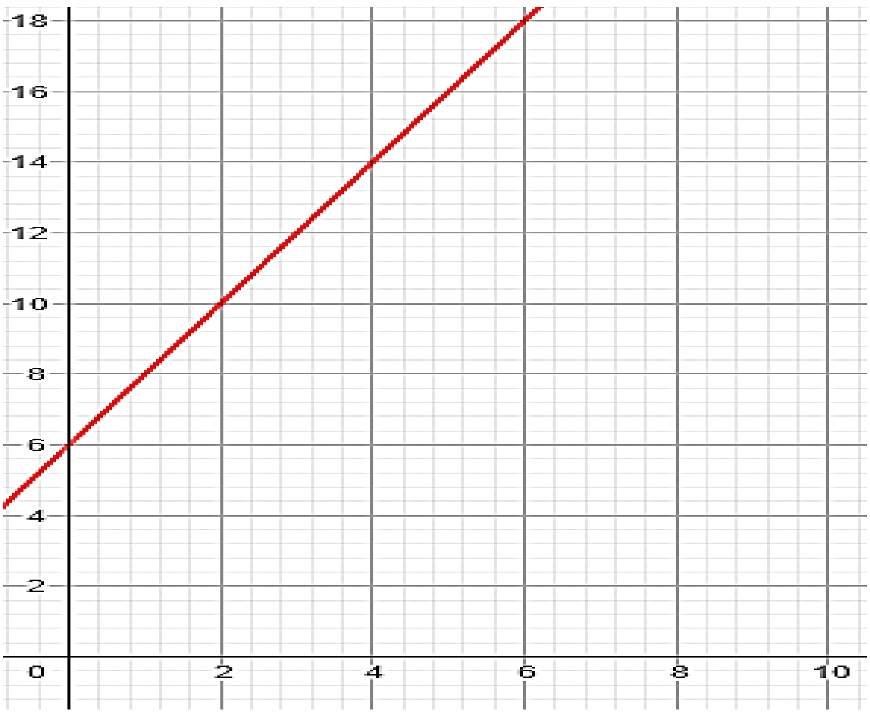
$$x = \frac{-660}{-22}$$

$$x = 30.$$

Então, $x_0 = 30$, ou seja, após 30 horas, ambos os reservatórios terão a mesma quantidade de água.

5- Dado o gráfico abaixo, dê a sua lei de formação e escreva um enunciado que o satisfaça.

Figura 53 - Ilustração da atividade: gráfico da função.



Solução:

O enunciado fica a critério dos alunos.

A lei de formação é $f(x) = 2x + 6$.

Slides

Figura 54 - Slides utilizados em aula.

9.2 Material entregue aos alunos

Figura 55 - Material entregue aos alunos.

PROMAT

Funções

- **Dinâmica**

1) Inserir as bolinhas uma por vez e anotar os valores medidos em ml.

Quantidade de Bolinhas	Nível da água (ml)

Qual é a variável dependente? E a variável independente?

2) Construir um gráfico no plano cartesiano que represente esses pontos.

3) É possível escrever uma lei de formação para esta função?

4) Qual seria o conjunto domínio e o conjunto imagem?

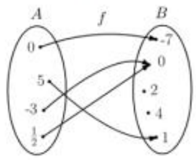
5) Quantas bolinhas são necessárias para que a água atinja 185 ml?

6) Que altura seria atingida se colocássemos 25 bolinhas?

- **Questões**

1) Dado o conjunto $A = \{2, 1, 0, 1, 2, 3\}$, faça um esquema representando por meio do diagrama de flechas, a função $f(x) = 2 + 1$.

2) O diagrama de flechas abaixo representa uma função f de A em B. Determine:



a) $D(f) = \left\{0, 5, -3, \frac{1}{2}\right\}$

b) $Cd(f) = \{-7, 0, 2, 4, 1\}$

c) $Im(f) = \{-7, 0, 1\}$

d) $f(-3) = \{0\}$

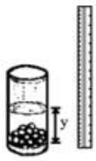
e) $f(5) = 1$

f) Se $f(x) = -7$, então $x = \{0\}$

Quais das imagens é função? E quais não são?

- **Atividades para revisão**

1- (Enem 2010- Adaptado). Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Determine a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x).

2- Dados os conjuntos $A = 1, 0, 1, 2$ e $B = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e a relação $R = (x, y) \in A \times B / y = x + 1$. Determine:

a) Os pares ordenados da relação R.

b) O conjunto domínio e o conjunto imagem.

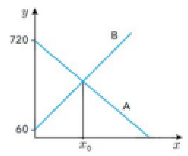
c) O diagrama de flechas.

d) O gráfico cartesiano.

3- (Portal da Matemática - OBMEP) "Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra."(RevistaExame.21abr.2010.).

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é?

4- (Portal da Matemática - OBMEP) O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x. Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.



9.3 Relatório

5° ENCONTRO (14/10/2023)

Sala A209

<u>Grupo de estagiários:</u> Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 14 de outubro de 2023, iniciou-se o quinto encontro do PROMAT. Como em todos os encontros é abordado conteúdos distintos, desta vez lecionamos o conteúdo de funções, trazendo à tona suas características e definições.

O encontro, como de praxe, foi iniciado corrigindo a lista de revisão do conteúdo passado, relacionado a questões problemas que envolviam sistemas de equações. Em seguida, aplicamos uma dinâmica relacionada a funções utilizando provetas, água e bolinhas de gude. O intuito de tal atividade era tentar formalizar uma função e obter sua lei de formação por meio da observação de um experimento, o qual consistia em colocar na proveta certa quantidade de água escolhida por cada dupla de alunos e depois ir colocando as bolinhas de gude uma a uma e ir anotando o quanto o nível de água na proveta se alterou e, dessa forma, seguiu-se a experiência. Grande parte dos alunos obteve resultados satisfatórios e conseguiram chegar a uma lei de formação da qual se podia estimar um volume de acordo com certa quantidade x de bolinhas sem a necessidade de colocá-las dentro da proveta.

Nos minutos finais para encerrar a dinâmica tivemos a ideia de agradar os alunos com pipoca doce, salgada e suco, e aproveitamos para observar como eles iriam se portar caso explicássemos enquanto eles estavam comendo. Com isso notamos que, para que seja funcional a ideia de trazer comida para os alunos no meio de uma dinâmica, uma correção de questões ou uma explicação, isso deverá ser feito de mesa em mesa, pois, ao irmos ao quadro para dar continuidade ao conteúdo, notamos que mais da metade dos alunos estavam dispersos, ou interessados em outras coisas, tendo em vista que apenas os alunos mais próximos da lousa que mantiveram a atenção. Então, para utilizar deste artifício novamente, deveremos trazer uma atividade que possamos transitar entre as carteiras e que não seja essencial a ida ao quadro para explicar algum conceito.

Depois da experiência realizada, demos início ao conteúdo de funções abordando inicialmente sua lei de formação. Em seguida, foi abordado o que é uma função afim e uma função linear, com exemplos algébricos e ilustrativos, utilizando-se do GeoGebra para mostrar como se comportavam os gráficos das funções que tínhamos apresentado. Também optamos por mostrar, pelo diagrama, as relações existentes entre o domínio, a imagem e o contradomínio; além de explicar e esclarecer as dúvidas dos respectivos conceitos. Após esclarecer algumas dúvidas que surgiram, o encontro terminou.

10. Encontro 6

10.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 6 – 21/10

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Funções do 2º grau.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Retomar conceitos das Funções do 2º grau e compreender a relação entre as variáveis dependente e independente.

Objetivos específicos:

- Relembrar a forma de escrever a lei de formação da função quadrática;
- Reconhecer gráficos, concavidade, pontos de mínimo e máximo;
- Identificar domínio, contradomínio e imagem em gráficos;
- Relembrar como encontrar os vértices, os zeros da função e se é positiva ou negativa.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Laboratório de informática, quadro, canetão, lápis, borracha, caderno, notebook, projeção de slides, atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

1- Revisão da Aula Anterior (30 min).

Iniciaremos a aula, utilizando a plataforma online kahoot como forma de retomar os conceitos da aula anterior.

Jogo 1 – Revisão de função afim (função do 1ºgrau). (15 questões)

2- Definição de Função Quadrática (40 min).

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de **função quadrática** ou **função do 2º grau** quando possui a seguinte lei de formação:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

Exemplos de funções quadráticas:

1- $f(x) = x^2 - 3x + 2$ em que $a = 1,\ \ b = -3,\ \ c = 2$

2- $f(x) = -2x^2 + 5x$ em que $a = -2,\ \ b = 5,\ \ c = 0$

3- $f(x) = 3x^2$ em que $a = 3,\ \ b = 0,\ \ c = 0$

{**função quadrática** ou **função do 2º grau** tem a seguinte lei de formação

$$f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

Exemplos:

4- $f(x) = x^2 - 3x + 2;\ a = 1,\ \ b = -3,\ \ c = 2$

5- $f(x) = -2x^2 + 5x;\ a = -2,\ \ b = 5,\ \ c = 0$

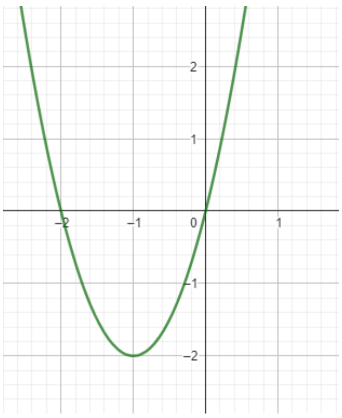
6- $f(x) = 3x^2;\ a = 3,\ \ b = 0,\ \ c = 0$}

O gráfico da função quadrática é uma **parábola**, e essa pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo", como podemos ver nos exemplos a seguir:

{O gráfico da função quadrática é uma **parábola**}

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 2$$

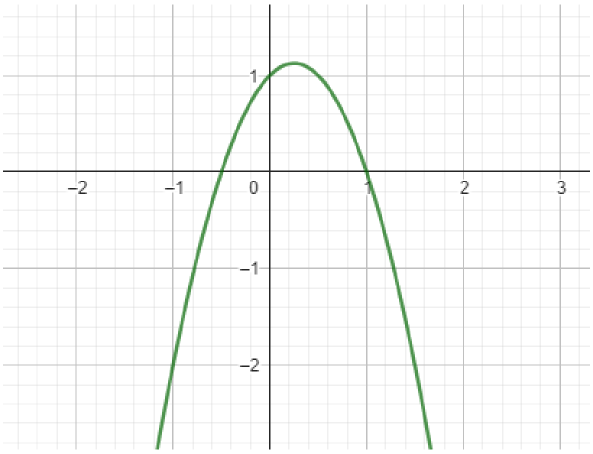
Figura 56 - Parábola com a concavidade voltada para cima.



{concavidade voltada para cima}

$$f(x) = -2x^2 + x + 1$$

Figura 57 - Parábola com a concavidade voltada para baixo.



{concavidade voltada para baixo}

Uma forma de verificar a concavidade de uma função quadrática é observando o coeficiente da variável x^2, a. Quando $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Quando $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

{$a > 0 \rightarrow$ concavidade voltada para cima;

$a < 0 \rightarrow$ concavidade voltada para baixo}

Os **zeros** ou **raízes** da função quadrática quando existirem são valores reais de x tais que $f(x) = 0$, ou seja, as soluções de uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c$. Para determinar quais são os zeros, podemos usar os métodos vistos para solucionar equações do 2º grau, por exemplo, fórmula resolutiva e soma e produto.

{zeros ou raízes da função quadrática

$x_1\ e\ x_2 \rightarrow f(x) = 0$;}

Observe que a existência de raízes reais para a função está condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Assim podemos verificar três casos para considerar:

1º) $\Delta > 0$, a função apresentará duas raízes distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º) $\Delta = 0$, a função apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3º) $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, dizemos que a função não possui raízes reais.

{$\Delta > 0$, duas raízes distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$, duas raízes iguais:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta < 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, não possui raízes reais}

Geometricamente as raízes de uma função do 2º grau indicam os pontos onde a parábola intercepta o eixo das abscissas.

Exemplo: vamos encontrar as raízes da função $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

Uma forma de encontrá-las é por meio da soma e produto.

Analisando os coeficientes da função temos $a = 2,\ b = (-6),\ c = 4$, então, precisamos encontrar x_1 e x_2 que satisfaçam as seguintes sentenças:

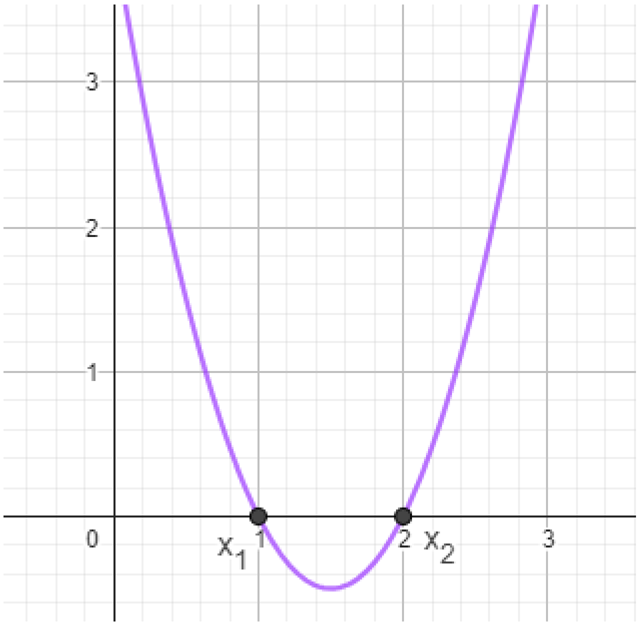
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 * x_2 = \frac{c}{a}.$$

Assim, precisamos encontrar $x_1 + x_2 = \frac{-(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e $x_1 * x_2 = \frac{4}{2} = 2$, ou seja, as raízes que procuramos são $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

E, como podemos verificar no gráfico, as raízes representam os pontos de intersecção da parábola com o eixo x.

$\{ f(x) = 2x^2 - 6x + 4\}$

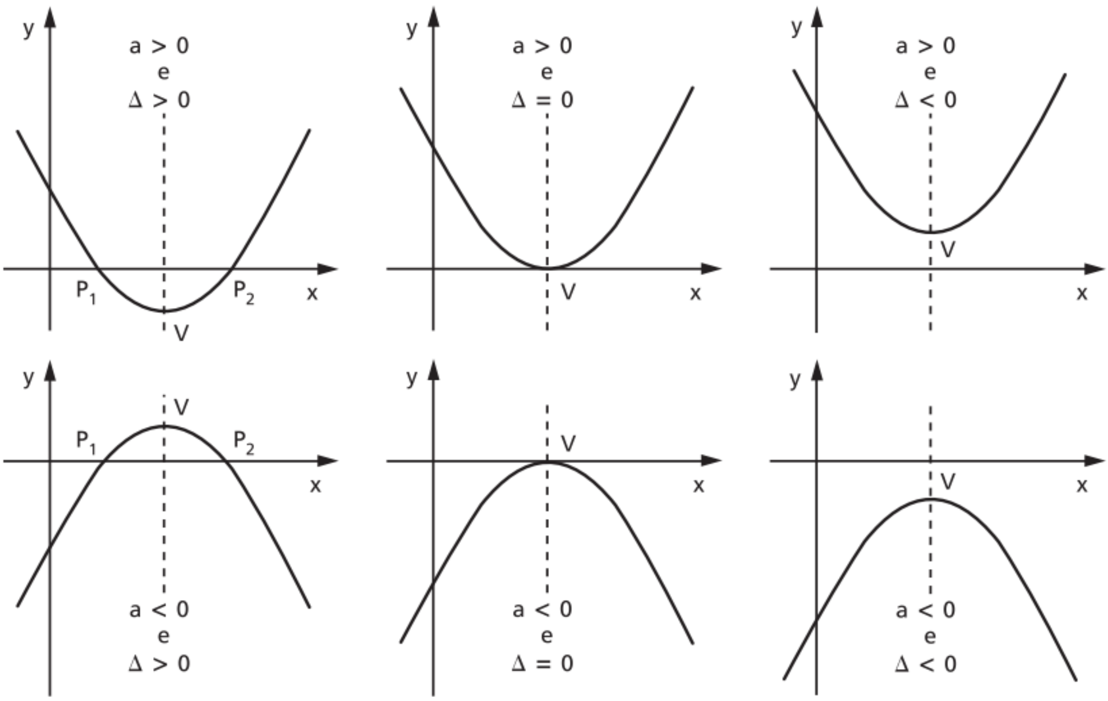
Figura 58 - Parábola com duas raízes distintas.



{As raízes são as interseções o eixo x com a parábola}

O gráfico de uma função como vimos, nos mostra como é o comportamento da função. Sabemos que o sinal do coeficiente a determina para qual lado está a concavidade da parábola. Agora, veremos sobre como o Δ interfere no gráfico.

Figura 59 - Comportamento da função de acordo com os coeficientes.



{relacionar o gráfico com o delta}

Dizemos que um $y_M \in Im(f)$ é um **valor máximo** de uma função quando $y_M \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. E chamamos x_M de **ponto máximo** da função quando $y_M = f(x_M)$.

{y_M é um valor máximo da função quando $y_M \geq y$ e x_M é ponto máximo quando $y_M = f(x_M)$}

Dizemos que um $y_m \in Im(f)$ é um **valor mínimo** de uma função quando $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. E chamamos x_m de **ponto mínimo** da função quando $y_m = f(x_m)$.

{y_m é um valor mínimo da função quando $y_m \leq y$ e x_m é ponto mínimo quando $y_m = f(x_m)$}

O ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado de **vértice** da parábola.

{O ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola}

Sabendo qual o vértice da parábola, conseguimos definir qual a imagem da função.

$$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -\frac{\Delta}{4a}\},$$

$$a < 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}.$$

{$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -\frac{\Delta}{4a}\},\ a < 0 \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$.}

3- Exercícios (20 min).

1) – Determine os zeros das funções abaixo e seus vértices.

a) $f(x) = x^2 + 8x - 9$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

d) $f(x) = -x^2 + 3x$

Solução:

a) Fazendo $f(x) = 0$, vamos ter $x^2 + 8x - 9 = 0$

Usando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, teremos.

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4 * 1 * (-9)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

Logo, os zeros da função são as raízes, $x1 = \frac{-8+10}{2} = 1\ e\ x2 = \frac{-8-10}{2} = -9$

Nosso vértice será $V = (Vx, Vy)\ com\ Vx = -\frac{b}{2a} = -\frac{(8)}{2*1} = -4\ e\ Vy = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{100}{4*1} = -25$. Então, $V = (-4, -25)$.

b) Fazendo $f(x) = 0$, vamos ter: $-x^2 + 7x - 12 = 0$

Calculamos Bhaskara e temos que os zeros da função são as raízes $x1 = \frac{-24}{(-7+1)} = \frac{24}{6} = 4\ e\ x2 = \frac{-24}{-7-1} = \frac{24}{8} = 3$

O vértice será $Vx = -\frac{b}{2a} = -\frac{(7)}{2*(-1)} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ e\ Vy = \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4*(-1)} = 0{,}25$. Então, $V = (3.5, 0.25)$.

c)

Raízes $x1 = \frac{1}{2}\ e\ x2 = 2$

Vértices $\left(\frac{5}{4}\right), \left(-\frac{9}{8}\right)$

d)

Raízes $x1 = 0\ e\ x2 = 3$

Vértices $(1.5, 2.3)$

2) - (ENEM-PPL-2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão, $L(x) = -x^2 + 12x - 20$ onde *x* representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

a) 4.

b) 6.

c) 9.

d) 10.

e) 14.

Solução:

A quantidade de bonés para maximizar o lucro é igual ao *Xv.*

Na função temos que:

a= 1

b= 12

c= - 20

logo:

$$Xv = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-2} = 6$$

3) Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções reais.

a) $y = x^2 - 2x + 4$

b) $y = -x^2 + 2x - 1$

c) $y = x^2 + x$

d) $y = -x^2 + 1$

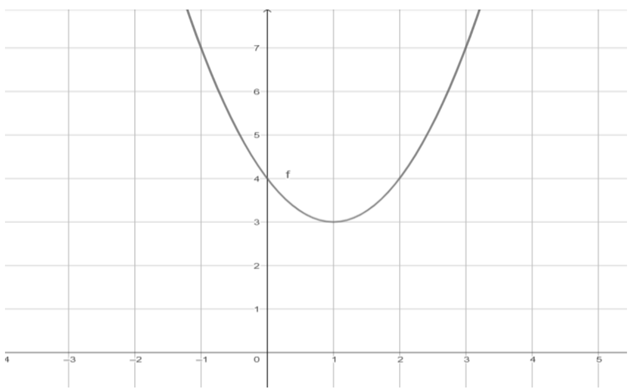
Solução:

a) Primeiro atribuímos a *x* alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

Tabela 21 - Valor correspondente de y.

x	$y = x^2 - 2x + 4$
4	12
3	7
2	4
1	3
0	4
-1	7
-2	12
-3	19

Figura 60 - Gráfico da função.

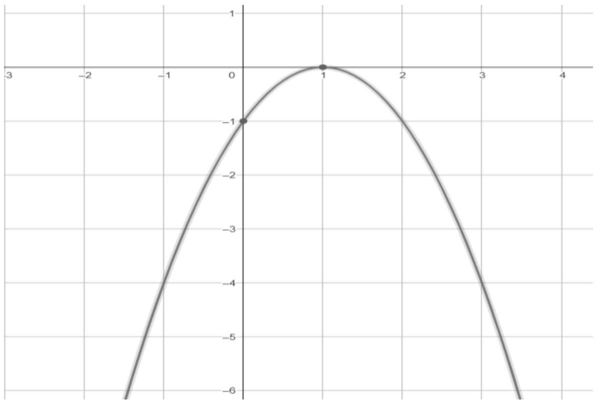


b)

Tabela 22 - Valor correspondente de y.

x	$y = -x^2 + 2x - 1$
4	-9
3	-4
2	-1
1	0
0	-1
-1	-4
-2	-9
-3	-16

Figura 61 - Gráfico da função.



4- Intervalo (30 min).

Consideramos 10 minutos a mais de intervalo para dar tempo dos alunos se direcionarem ao local do lanche e retornar para o laboratório de informática.

5- GeoGebra (60 min).

Com o intuito de permitir aos alunos a visualização do conteúdo explicado durante a aula, iremos utilizar o GeoGebra para abordar sobre o comportamento dos coeficientes da função, máximo e mínimo, imagem e concavidade. Segue a proposta da atividade:

Será entregue aos alunos uma atividade impressa com as seguintes questões:

1. Insira a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na caixa de entrada de GeoGebra. Observe o gráfico gerado, note que surgiu três pontos deslizantes.
    a) Descreva o comportamento da parábola para -5 < a < 5.
    b) Descreva o comportamento da parábola para -5 < b < 5.
    c) Descreva o comportamento da parábola para -5 < c < 5.
2. Insira a função $f(x) = ax^2 + c$ na caixa de entrada de GeoGebra. Observe o gráfico gerado, note que surgiu dois pontos deslizantes.
    a) Descreva o comportamento da parábola para -5 < a < 5.
    b) Descreva o comportamento da parábola para -5 < c < 5.
    c) Insira a função $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2 - 9$ e $f(x) = x^2 - 25$ na caixa de entrada. Ao observar os gráficos, é possível notar alguma diferença? Quais?
    d) Quais são os pontos de mínimo das funções acima?
3. A partir das atividades realizadas acima, a concavidade das funções era voltada para cima ou para baixo? Descreva o que você percebeu sobre cada função.
4. Insira a função $f(x) = -x^2 - 4$ na caixa de entrada do GeoGebra.
    a) A função possui raízes reais?
    b) Observe o comportamento da função no gráfico. O que é possível notar?
    c) Onde a parábola intercepta o eixo das ordenadas? E qual é a imagem da função?
5. Insira a função $f(x) = 3x^2 + 12x$ na caixa de entrada do Geogebra.
    a) A função possui raizes reais? Se sim, quais?
    b) A função intercepta o eixo y? Se sim, onde?
    c) Observe que surgiu um ponto C no gráfico. O que é esse ponto?

6- Quiz com Kahoot (min).

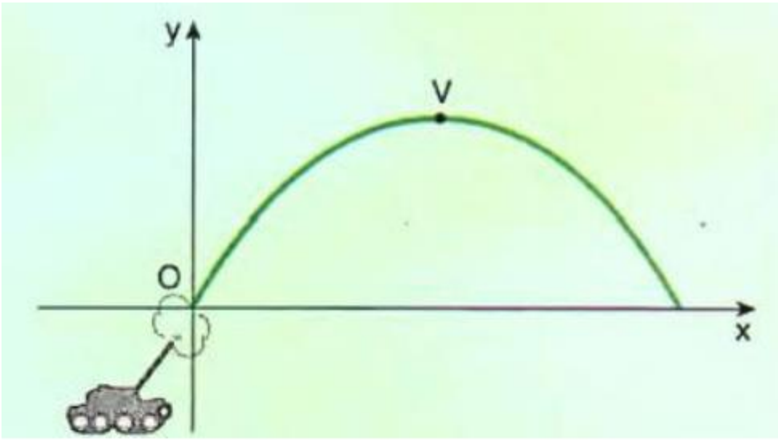
Jogo 2 - função quadrática;

Jogo 3 – Bora resolver.

7- Atividades

1) Uma bala é atirada de um canhão de brinquedo (como mostra a figura) e descreve uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$ (onde x e y são medidos em metros).

Figura 62 - Ilustração: atividade da bala de canhão.



Determine:

a) A altura máxima atingida pela bala;

b) O alcance do disparo.

Solução:

a) Como $a = -3 < 0$, a parábola tem um ponto de máximo *V* cujas coordenadas são *(Xv, Yv).* Temos:

$$Xv = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{-6} = 10$$

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3600}{-12} = 300$$

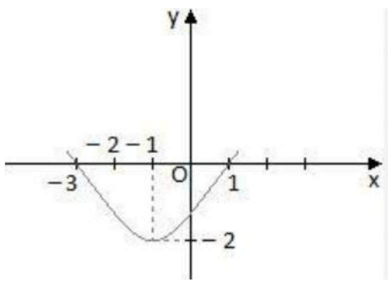
Assim, a altura máxima atingida é 300 m.

b) A bala toca o solo quando $y = 0$, isto é: $-3x^2 + 60x = 0 \rightarrow x = 0\ ou\ x = 20$. Mas $x = 0$ não convém, pois representa o ponto inicial do disparo; então, o alcance do disparo é $20m$.

2) (UF-AM). O gráfico abaixo representa uma função quadrática:

Essa função é:

Figura 63 - Gráfico de uma função quadrática.



a) $x^2 - 2x - 3$

b) $\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$

c) $x^2 + 2x - 3$

d) $\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

e) $\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$

Solução:

Toda função do segundo grau pode ser escrita na chamada forma fatorada:

$$(X - X1) * (X - X2)$$

Em que *X1* e *X2* representam as raízes da função. Analisando o gráfico vemos que as raízes são -3 e 1, então vamos substituí-las na fórmula:

$$(x - (-3)) * (x - 1)$$

$$(x + 3) * (x - 1)$$

E fazendo a distributiva chegará em:

$$x^2 + 2x - 3$$

Porém há o coeficiente angular multiplicando esse polinômio e essa equação terá que ser igual a -2 pois a partir desse valor e da coordenada x do vértice, é possível encontrar o valor do coeficiente a e isso resulta em:

$$a(x^2 + 2x - 3) = -2$$

$$a((-1)^2 + 2(-1) - 3) = -2$$

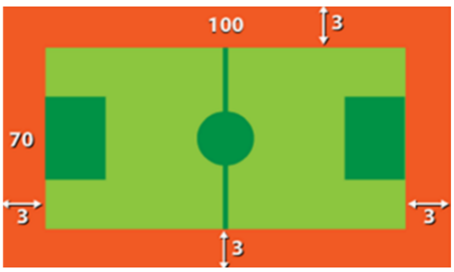
$$a(-4) = -2$$

$$a = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Que corresponde a letra d.

3) Um clube dispõe de um campo de futebol de 100 m de comprimento por 70m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?

Figura 64 - Campo de futebol.



Solução:

A área da região cercada é:

$$(100 + 2 * 3) * (70 + 2 * 3) = 106 * 76 = 8056\, m^2$$

Se a largura da pista fosse de 4m, a área da região cercada seria:

$$(100 + 2 * 4) * (70 + 2 * 4) = 108 * 78 = 8424\, m^2$$

Enfim, a cada largura *x* escolhida para a pista há uma área *A(x)* da região cercada. O valor de *A(x)* é uma função de *x.* Procuraremos a lei que expressa *A(x)* em função de *x.*

$$A(x) = (100 + 2x) * (70 + 2x) = 7000 + 200x + 140x + 4x^2 =$$
$$4x^2 + 340x + 7000$$

4) Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das seguintes funções:
   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
   c) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
   d) $f(x) = -3x^2 + 6$
   e) $f(x) = x - 2x^2$

Solução:

a) $1\ e\ 2$
b) $2\ e\ \frac{1}{3}$
c) $-\frac{1}{2}\ e\ 2$
d) $-\sqrt{2}\ e\ \sqrt{2}$
e) $0\ e\ \frac{1}{2}$

5) (UFSCar-SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$, onde t é o tempo medido em segundo e *h(t)* é a altura em metros da bola no instante *t*. Determine, após o chute:
   a) O instante em que a bola retornará ao solo.
   b) A altura atingida pela bola.

   Solução:

   a) Houve dois momentos em que a bola tocou o chão: o primeiro foi antes de ela ser chutada e o segundo foi quando ela terminou sua trajetória e retornou para o chão. Em ambos os momentos a altura *h(t)* era igual a zero, sendo assim:

$$h(t) = -2t^2 + 8t$$

$$0 = -2t^2 + 8t$$

$$2t^2 - 8t = 0$$

$$2t(t - 4) = 0$$

$$t' = 0$$

$$t'' - 4 = 0 \rightarrow t'' = 4$$

Portanto, o segundo momento em que a bola tocou no chão foi no instante de quatro segundos.

b) A altura máxima atingida pela bola é dada pelo vértice da parábola. As coordenadas do seu vértice podem ser encontradas através de:

$$Xv = -\frac{b}{2a} \; e \;\; Yv = -\frac{\Delta}{4a}$$

No caso representado, é interessante encontrar apenas o *Yv*

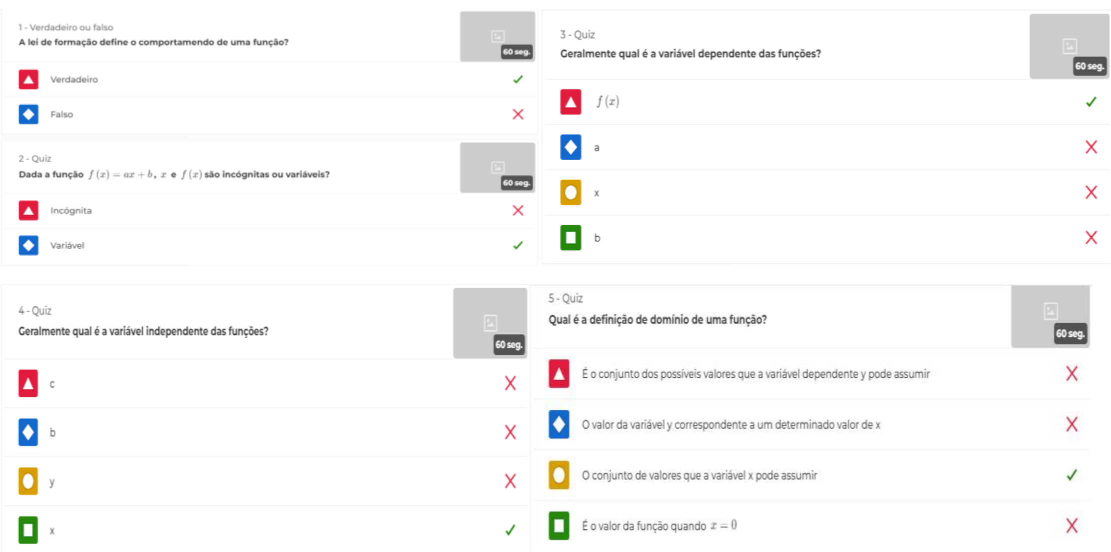
$$Yv = -\frac{b^2 - 4 * a * c}{4a}$$

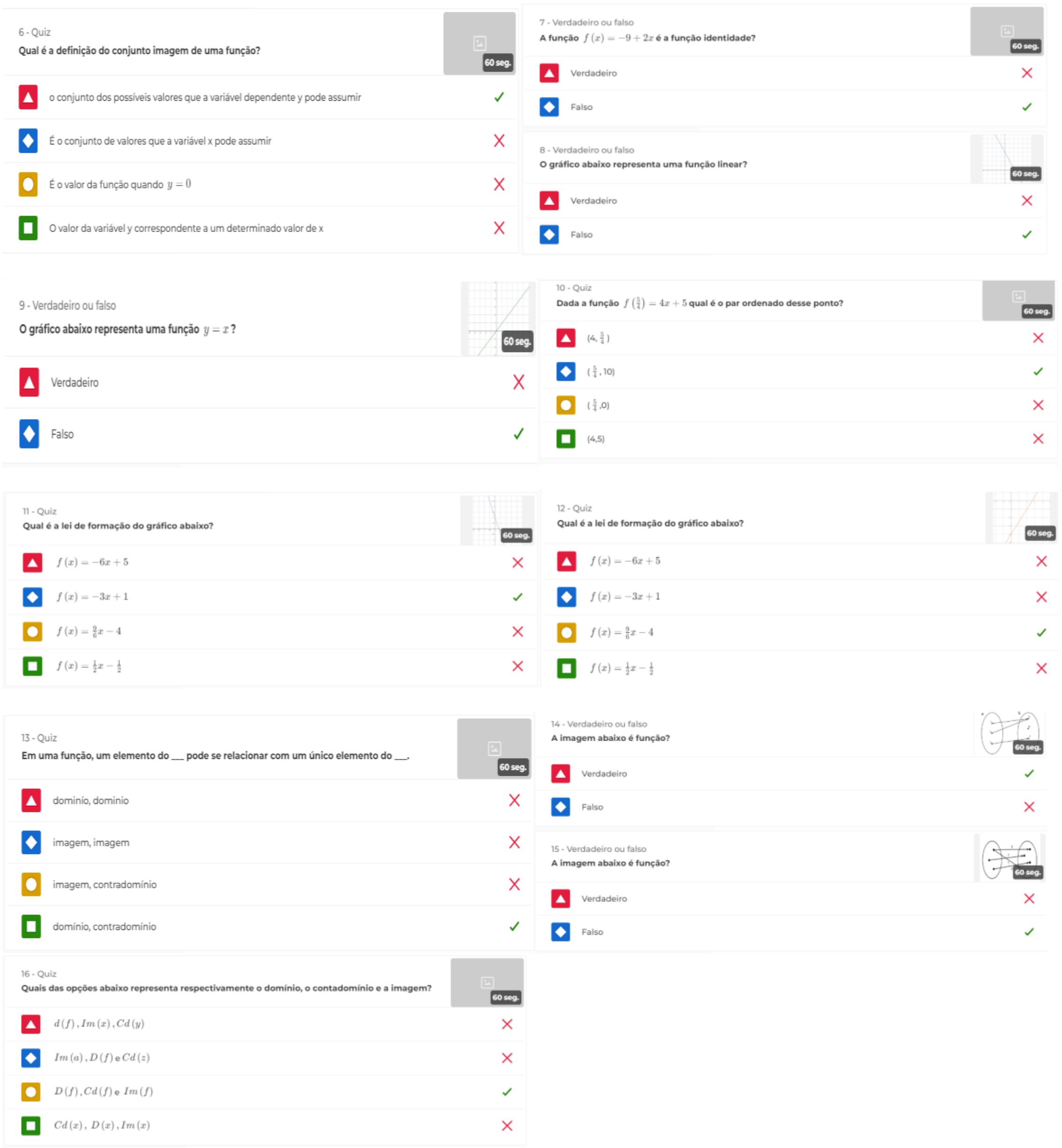
$$Yv = \frac{-(8^2 - 4 * (-2) * 0}{4 * (-2)}$$

$Yv = \frac{-(64 - 0)}{-8} = 8$ metros é a altura máxima atingida pela bola.

Jogo – Função do 1º grau.

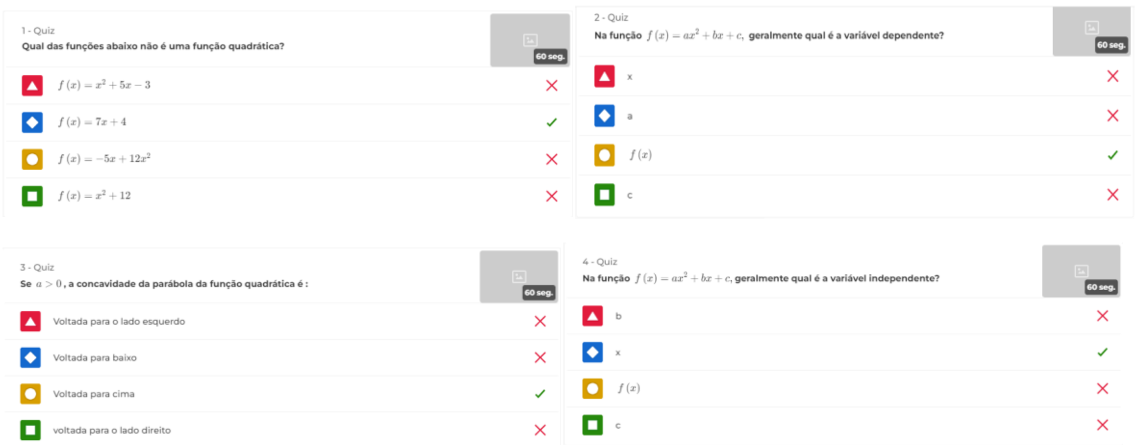
Figura 65 - Questões do jogo.

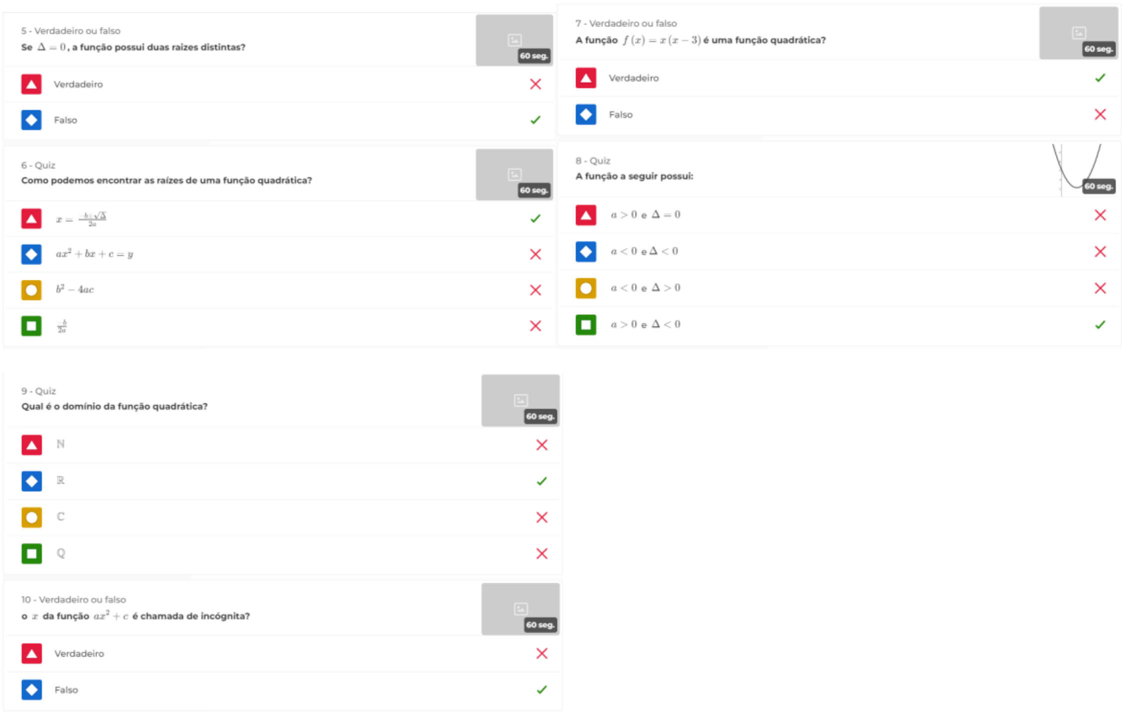




Jogo – Função Quadrática

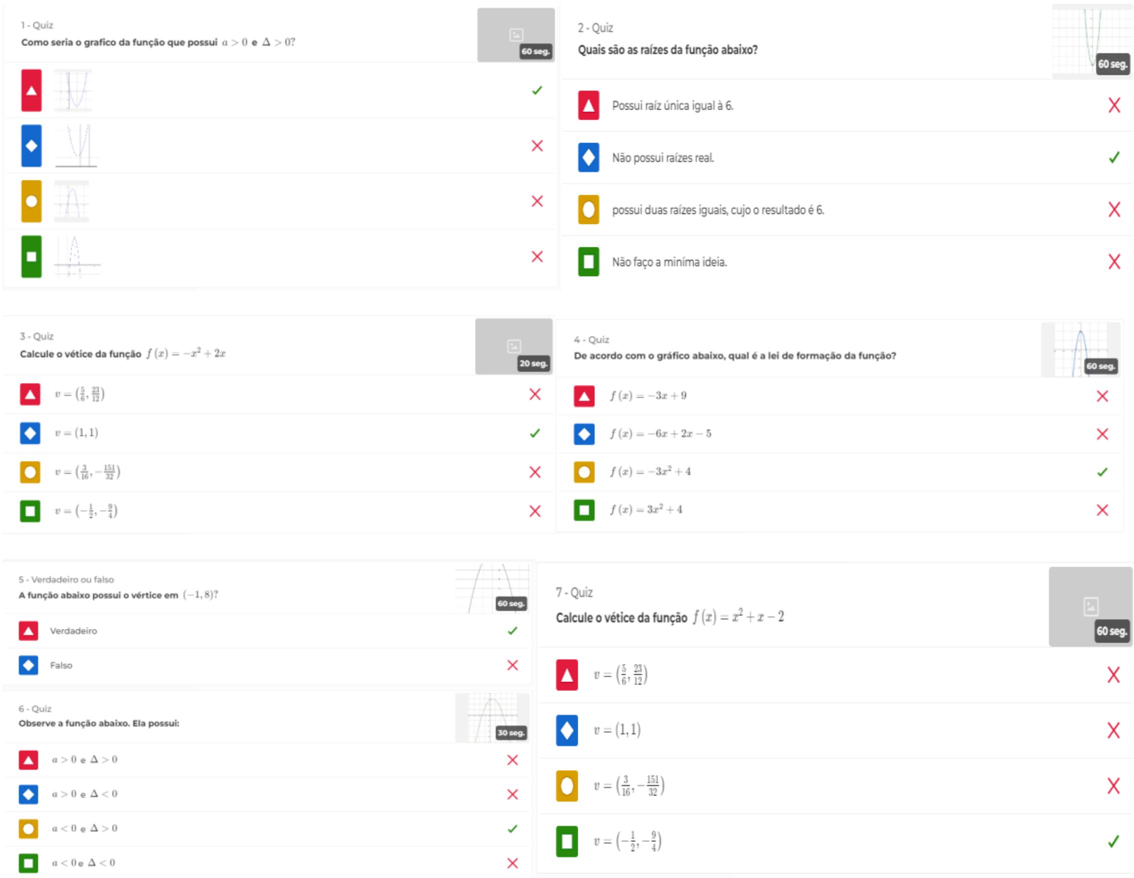
Figura 66 - Questões do jogo.

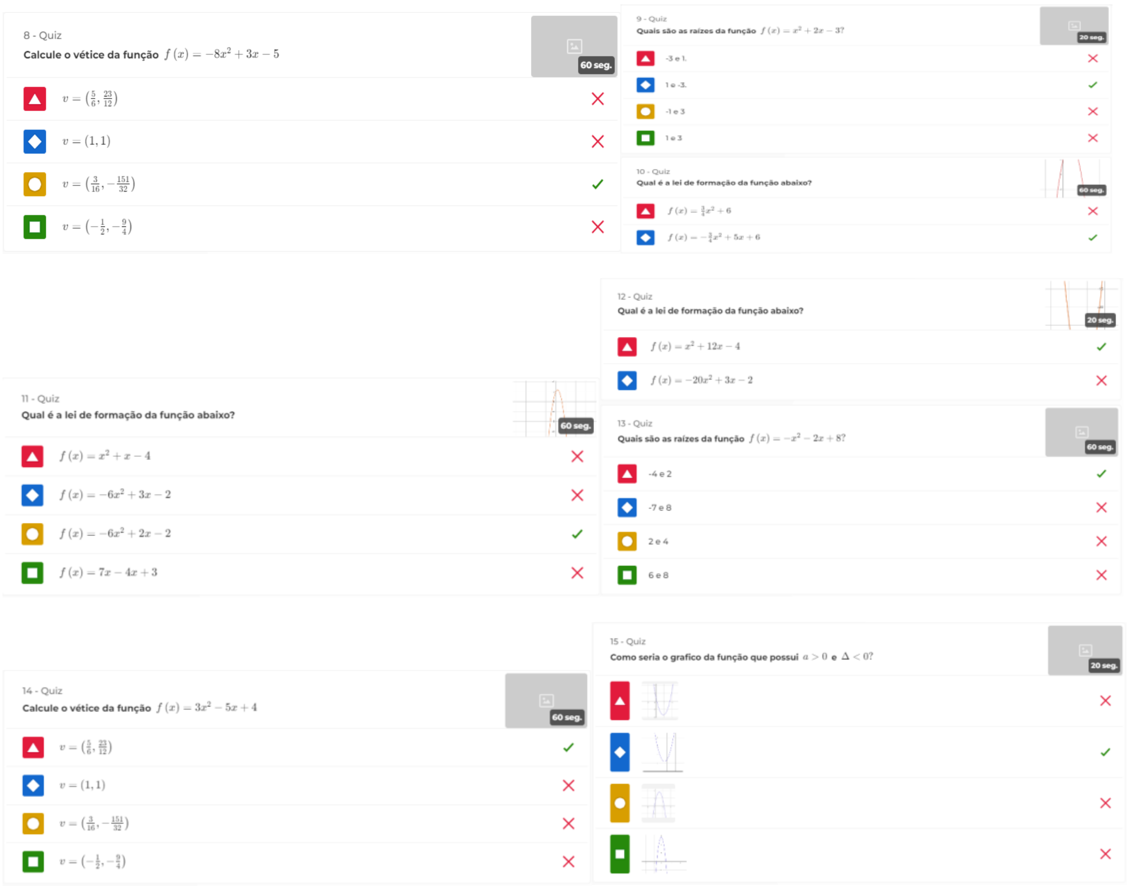




Jogo – Bora resolver

Figura 67 - Questões do jogo.





10.2 Material entregue aos alunos

Figura 68 - Material entregue aos alunos.

PROMAT

Função Quadrática

- **Questões**

1) Determine os zeros das funções abaixo e seus vértices.

a) $f(x) = x^2 + 8x - 9$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

d) $f(x) = -x^2 + 3x$

2) (ENEM-PPL-2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão, $L(x) = -x^2 + 12x - 20$ onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

3) Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções reais.

a) $y = x^2 - 2x + 4$

b) $y = -x^2 + 2x - 1$

c) $y = x^2 + x$

d) $y = -x^2 + 1$

Utilizando o GeoGebra

- **Atividades**

1) Insira a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na caixa de entrada de GeoGebra. Observe o gráfico gerado, note que surgiu três pontos deslizantes.

a) Descreva o comportamento da parábola para $-5 < a < 5$.
b) Descreva o comportamento da parábola para $-5 < b < 5$.
c) Descreva o comportamento da parábola para $-5 < c < 5$.

2) Insira a função $f(x) = ax^2 + c$ na caixa de entrada de GeoGebra. Observe o gráfico gerado, note que surgiu dois pontos deslizantes.

a) Descreva o comportamento da parábola para $-5 < a < 5$.
b) Descreva o comportamento da parábola para $-5 < c < 5$.
c) Insira a função $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2 - 9$ e $f(x) = x^2 - 25$ na caixa de entrada. Ao observar os gráficos, é possível notar alguma diferença? Quais?
d) Quais são os pontos de mínimo das funções acima?

3) A partir das atividades realizadas acima, a concavidade das funções era voltada para cima ou para baixo? Descreva o que você percebeu sobre cada função.

4) Insira a função $f(x) = -x^2 - 4$ na caixa de entrada do GeoGebra.

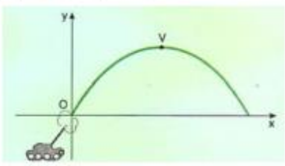
a) A função possui raízes reais?
b) Observe o comportamento da função no gráfico. O que é possível notar?
c) Onde a parábola intercepta o eixo das ordenadas? E qual é a imagem da função?

5) Insira a função $f(x) = 3x^2 + 12x$ na caixa de entrada do Geogebra.

a) A função possui raízes reais? Se sim, quais
b) A função intercepta o eixo y? Se sim, onde?
c) Observe que surgiu um ponto C no gráfico. O que é esse ponto?

- **Atividades para revisão**

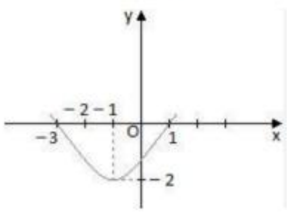
1) Uma bala é atirada de um canhão de brinquedo (como mostra a figura) e descreve uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$ (onde x e y são medidos em metros).



Determine:

a) A altura máxima atingida pela bala;
b) O alcance do disparo.

2) (UF-AM). O gráfico abaixo representa uma função quadrática:



a) $x^2 - 2x - 3$

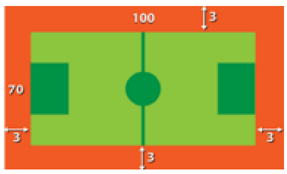
b) $\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$

c) $x^2 + 2x - 3$

d) $\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

e) $\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$

3) Um clube dispõe de um campo de futebol de 100m de comprimento por 70m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?



PROMAT 5

4) Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

c) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

d) $f(x) = -3x^2 + 6$

e) $f(x) = x - 2x^2$

(UFSCar-SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$, onde t é o tempo medido em segundo e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute:

a) O instante em que a bola retornará ao solo.
b) A altura atingida pela bola.

10.3 Relatório

6° ENCONTRO (21/10/2023)

Laboratório de Informática 7

<u>Grupo de estagiários:</u> Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 23 de outubro de 2023, ocorreu o sexto encontro do PROMAT. Nesse dia, optamos por lecionar a aula no laboratório de informática para a utilização de recursos tecnológicos, como o software Kahoot e a plataforma GeoGebra. Ambos os recursos foram utilizados na aplicação do conteúdo de função quadrática.

Para dar mais detalhes à aprendizagem, nós alterarmos o formato de aula a que estamos acostumados. Decidimos não corrigir os exercícios da aula anterior e achamos mais adequado utilizar o Kahoot para trazer um jogo de retomada de conteúdo envolvendo as funções afim e linear. Este software traz uma customização de nome e personagem para o jogador, os quais serão usados para representar os alunos e visualizarmos seu avanço. Por tratar-se de algo competitivo, os discentes pareciam animados com tal atividade. No início do jogo, tivemos um problema de conexão e, após ele ser resolvido, uma fileira de computadores desligaram. Para economizar tempo e não deixar os alunos sem participarem da atividade, os professores emprestaram seus aparelhos até que o problema fosse resolvido. Conforme o jogo avançou, percebemos que grande parte dos alunos mostravam aptidão ao acertar as questões que estavam sendo exibidas. Além da pontuação ser mostrada na projeção, também conseguimos observar os erros e acertos que ocorreram. Em alguns casos, quando a porcentagem de erros era maior, nós recorríamos ao quadro para explicar aquele conceito apresentado e tirar dúvidas.

Após o intervalo, abordamos o conteúdo de função quadrática, buscando ensiná-la de forma clara e retomando os diversos conceitos que estão inclusos neste material, como por exemplo: seus gráficos, sua lei de formação, ponto máximo e mínimo, vértice, o que ocorre com a mudança do delta, entre outros aspectos relacionados. Todas estas explicações foram realizadas no quadro. Depois de relembrarmos tais conceitos, voltamos ao computador para utilizar o GeoGebra. O intuito de trazermos esta plataforma foi fazer com que os alunos percebessem como a lei de formação da função quadrática se comportava quando alteramos os valores dos coeficientes a, b e c, observando seus diversos comportamentos e, em conjunto, havia questões que solicitavam que eles explorassem e anotassem como ocorreram tais modificações. Esta atividade pode esclarecer e sanar dúvidas referente à visualização gráfica da função e a forma que podemos encontrá-la em diversas questões e problemas.

Posteriormente a tais recapitulações, voltamos a utilizar o Kahoot, onde havíamos preparado mais dois jogos com foco em função quadrática. Por terem visto recentemente os conteúdos que apareciam nas perguntas propostas por nós, houve poucas respostas erradas e, diferente do que esperávamos o pódio dos três jogos foram completamente diferentes. Isso foi bom para perceber que os alunos aparentaram estar em níveis de conhecimento semelhantes referente ao que foi tratado no decorrer desse encontro. A última rodada se estendeu mais do que esperávamos, então perguntamos aos alunos se eles queriam terminar o jogo ou encerrar o encontro naquele momento. Todos os alunos optaram por terminar o jogo. Assim que se encerrou o último jogo e foi entregue um prêmio para todos os participantes, o encontro deste dia terminou alguns minutos após o esperado.

11. Encontro 7

11.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 7 – 04/11

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Polinômios, produtos notáveis e fatoração algébrica.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Compreender e desenvolver o conceito de polinômio, sua utilização e operações, além da sua relação com a fatoração de expressões algébricas e produtos notáveis.

Objetivos específicos:

- Compreender o conceito de monômio e polinômio, suas operações e aplicações em problemas matemáticos;
- Identificar o grau de um polinômio, bem como realizar operações de soma, de subtração, de multiplicação e de divisão;

- Fatorar expressões algébricas de dois modos: colocando em evidência um fator comum e por agrupamento;
- Compreender as representações geométricas.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, lápis, borracha, caderno, notebook, projeção de slides, atividades impressas, jogo baralho matemático dos polinômios.

Encaminhamento metodológico:

1- Revisão da Aula Anterior (30 min).

Iniciaremos a aula retomando e corrigindo atividades da aula anterior, e tirando possíveis dúvidas que os alunos possam ter.

2- Definição de Monômio e Polinômio (40 min).

Denomina-se **monômio** ou **termo algébrico** toda expressão algébrica representada apenas por um número, por uma ou mais variáveis, elevadas a potências naturais, ou por um produto desses termos.

Geralmente, um monômio é formado por duas partes: um número, chamado **coeficiente do monômio** e uma variável ou uma multiplicação de variáveis (considerando inclusive seus expoentes), chamada **parte literal**.

Grau de um monômio

O grau de um monômio com coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes das variáveis.

Por exemplo, o monômio $6x^2y^5$ é do 7º grau, pois $(2 + 5 = 7)$.

O grau de um monômio também pode ser dado em relação a uma de suas variáveis. Nesse caso, o grau do monômio corresponde ao expoente da variável considerada.

Por exemplo, o monômio $3x^2y^5$ é do 2º grau em relação a variável x.

Monômios semelhantes

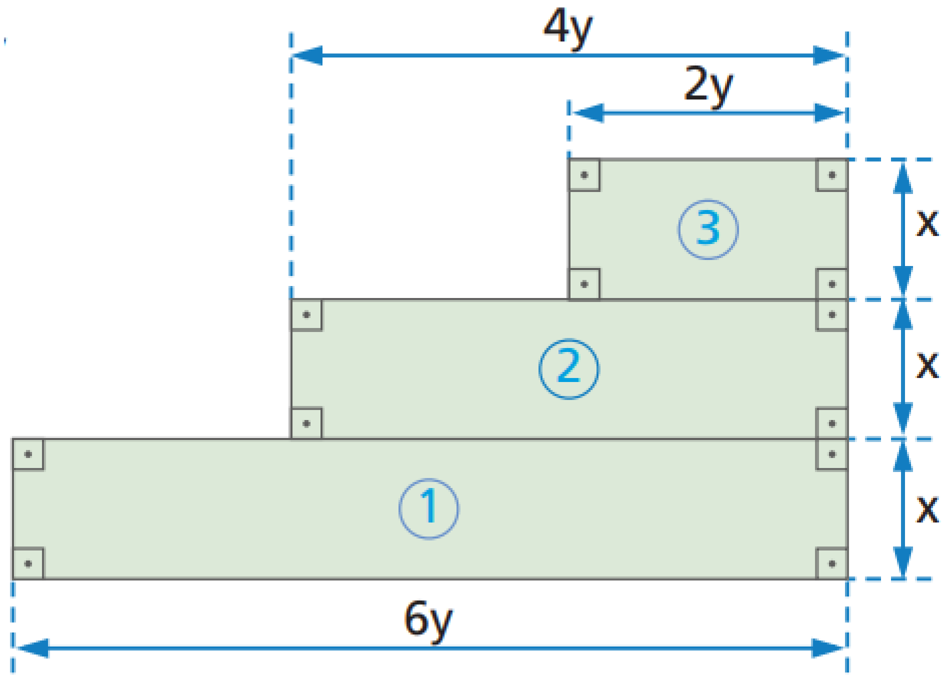
Quando dois ou mais monômios apresentam a **mesma parte literal**, eles são denominados **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Por exemplo, os monômios trabalhados nos exemplos anteriores, $6x^2y^5$ e $3x^2y^5$, são monômios semelhantes.

Adição de monômios

Vamos calcular a área da superfície mostrada abaixo:

Figura 69 - Ilustração da atividade: cálculo de área.



Podemos considerar que:

- A área da figura 1 é dada por $x * 6y$ ou $6xy$;
- A área da figura 2 é dada por $4xy$;
- A área da figura 3 é dada por $2xy$.

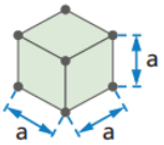
Então, podemos considerar como área total da superfície a soma das 3 áreas, ou seja, $6xy + 4xy + 2xy = (6 + 4 + 2)xy = 12xy$.

Como foi feito acima, em uma expressão algébrica, se todos os monômios ou termos são semelhantes, podemos tornar mais simples a expressão adicionando algebricamente os coeficientes, (6+4+2), e mantendo a parte literal, xy. Essa operação também pode ser chamada de **redução de termos semelhantes**.

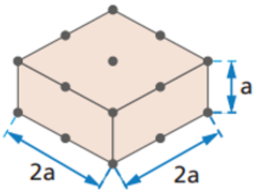
Multiplicação de monômios

Observe o monômio que representa o volume de cada sólido abaixo:

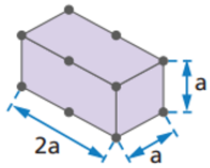
Figura 70 - Ilustração: monômio que representa o volume.



volume: $a * a * a = a^3$



volume: $2a * 2a * a = 4a^3$

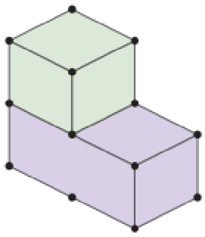


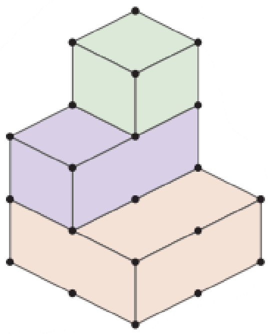
volume: $2a * a * a = 2a^3$

Dessa forma, para multiplicar dois ou mais monômios, multiplicamos os coeficientes entre si e multiplicamos as partes literais entre si.

Considerando as figuras anteriores, encontre o monômio que representa o volume dos sólidos abaixo:

Figura 71 - Ilustração da atividade: calcular o volume.





Divisão de monômios

Lembre-se da propriedade de potenciação, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Vamos calcular $12y^5 : 4y^3$.

$$12y^5 : 4y^3 = \frac{12y^5}{4y^3} = \frac{12}{4} * \frac{y^5}{y^3} = 3y^2.$$

Assim, para dividir um monômio por outro, dividimos os coeficientes entre si e as partes literais entre si.

Potenciação de monômios

Vamos calcular o quadrado do monômio $-10a^3$.

$(-10a^3)^2 = (-10a^3) * (-10a^3) = (-10) * (-10) * a^3 * a^3 = 100a^6$.

Para facilitar os cálculos, podemos utilizar as propriedades de potenciação

$$(a^m)^n = a^{m*n} \quad e \quad (a * b)^n = a^n * b^n.$$

Polinômios

Qualquer adição algébrica de monômios denomina-se **polinômio**.

Consideremos o polinômio $x^2 + xy + xy + x^2 + xy$.

Observe que esse polinômio possui termos ou monômios semelhantes. Sabendo que esses termos semelhantes podem ser reduzidos, temos:

$$x^2 + xy + xy + x^2 + xy = x^2 + x^2 + xy + xy + xy = 2x^2 + 3xy.$$

Dizemos que $2x^2 + 3xy$ é a forma reduzida do polinômio $x^2 + xy + xy + x^2 + xy$.

Os polinômios de um só termo são chamados monômios.

Um polinômio reduzido que apresenta dois termos também recebe o nome de binômio. Exemplos: $3x + 2y$; $4a - b$; $xy + 5y^2$.

Um polinômio reduzido que apresenta três termos também é chamado trinômio. Exemplo: $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 - 7x + 10$; $a + ab - bc$.

Um polinômio reduzido com mais de três termos não tem nome particular.

Grau do polinômio

O grau de um polinômio reduzido não nulo é dado por seu termo de maior grau.

Por exemplo, o polinômio $a^3x - 2a^4x^3 + 9ax^2$ é do 7º grau (considerando *a* como variável).

Polinômios com uma só variável

Na Matemática, é de costume escrever os polinômios com os termos em ordem segundo as potências decrescentes da variável x. Veja os exemplos: $6x^2 - 5x - 1$; $x^3 - x - 7$; $5x^4 - x^2 + 2x - 10$.

Quando um polinômio está assim ordenado, e nele não aparecem uma ou mais potências da variável x menores que o grau do polinômio, dizemos que o polinômio é incompleto.

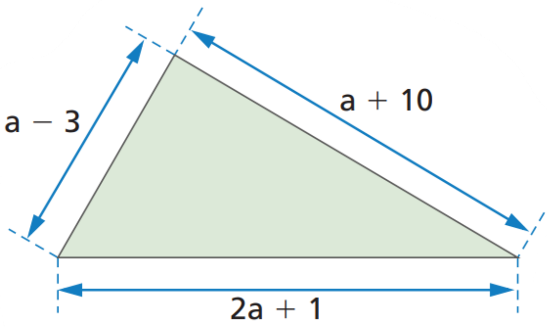
Por exemplo, o polinômio $5x^4 - x^2 + 2x - 10$, é incompleto e pode ser escrito na sua forma completa da seguinte forma: $5x^4 + 0x^3 - x^2 + 2x - 10$.

Exemplo:

Adição de polinômios

Calcule o perímetro da seguinte figura:

Figura 72 - Ilustração da atividade: cálculo de perímetro.



Somando as medidas dos lados temos:

$$(2a + 1) + (a + 10) + (a - 3) = 2a + 1 + a + 10 + a - 3.$$

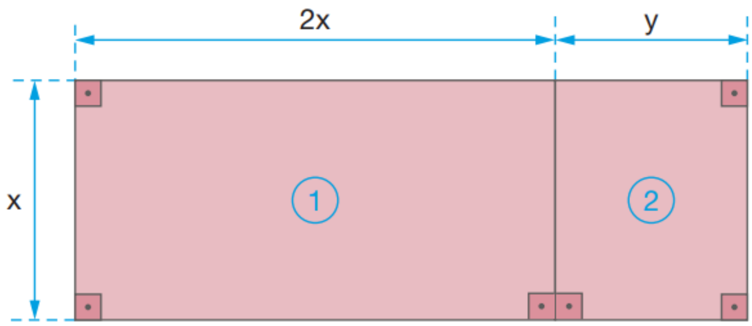
Agrupando e reduzindo os termos semelhantes,

$$2a + a + a + 1 + 10 - 3 = 4a + 8.$$

Multiplicação de polinômios

Primeiro vamos ver a multiplicação de um polinômio por um monômio. Para isso vamos calcular a área da seguinte figura:

Figura 73 - Ilustração da atividade: cálculo de área.



Uma forma de representar a área desse retângulo é pela multiplicação dos termos $x * (2x + y)$. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação com a adição, temos:

$$x * (2x + y) = x * 2x + x * y.$$

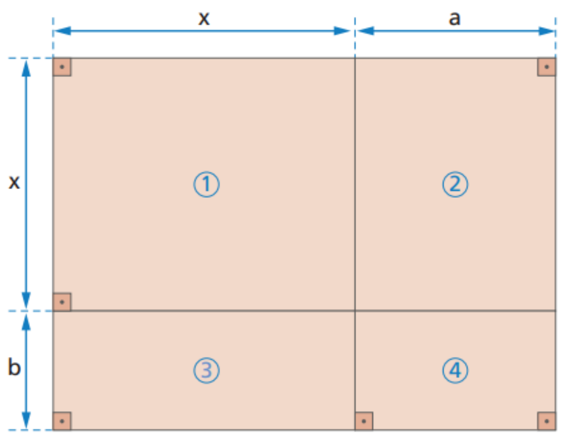
Repare que agora obtivemos uma representação da soma das áreas de cada retângulo menor.

$$x * 2x + x * y = 2x^2 + xy$$

A multiplicação de um monômio por um polinômio é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

Agora represente a área da seguinte figura:

Figura 74 - Ilustração da atividade: área da figura.



Como vimos no exemplo anterior, a expressão que representa a área do retângulo maior é a multiplicação $(x+a)*(x+b)$.

Utilizando a propriedade distributiva:

$(x+a)*(x+b) = x*x + x*a + b*x + b*a = x^2 + ax + bx + ab.$

A multiplicação de um polinômio por outro polinômio é feita multiplicando-se cada termo (ou monômio) de um polinômio por cada termo (ou monômio) do outro e reduzindo-se os termos semelhantes (se houver).

Divisão de polinômios por um monômio

Efetuamos a divisão de um polinômio por um monômio não nulo fazendo a divisão de cada termo do polinômio pelo monômio.

Por exemplo, vamos dividir $9x^5 + 21x^4 - 12x^3$ por $3x^3$:

$$(9x^5 + 21x^4 - 12x^3):(3x^3) = (9x^5 + 21x^4 - 12x^3) * \frac{1}{3x^3},$$

$$= \frac{9x^5}{3x^3} + \frac{21x^4}{3x^3} - \frac{12x^3}{3x^3} = 3x^2 + 7x - 4.$$

3- Exemplos e Exercícios (30 min).

1) (Portal da Matemática - OBMEP) Sejam os polinômios $P = x^2 + 3x - 4$ e $Q = x^2 + 2$

2) determine:

   a) $P + Q$.

   b) $P - Q$.

Solução:

Para resolver esse exercício, inicialmente temos que somar os dois polinômios e em seguida observar quais termos são iguais e juntá-los:

a) $P + Q$.

$$x^2 + 3x - 4 + x^2 + 2$$
$$x^2 + x^2 + 3x - 4 + 2$$
$$2\,x^2 + 3x - 2$$

Então $2x^2 + 3x - 2$ é a resposta da alternativa a. Iremos repetir o mesmo processo para responder a alternativa b:

$$x^2 + 3x - 4 - (x^2 + 2)$$
$$x^2 + 3x - 4 - x^2 - 2$$
$$x^2 - x^2 + 3x - 4 - 2$$
$$3x - 6$$

Logo, a resposta da letra b é $3x - 6$.

3) (Portal da Matemática - OBMEP) Resolva os Produtos:
   a) $(x + 1) * (x + 2)$.
   b) $(x + 3) * (x + 9)$.
   c) $(x - 2) * (x + 3)$.
   d) $(x - 4) * (x + 4)$.
   e) $(x + 5) * (x + 5)$.
   f) $(x - 4) * (x - 4)$.
   g) $\left(x + \frac{1}{2}\right) * \left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Gabarito:
   a) $x^2 + 3x + 2$.
   b) $x^2 + 12x + 27$.
   c) $x^2 + x - 6$.
   d) $x^2 - 16$.
   e) $x^2 + 10x + 25$.
   f) $x^2 - 8x + 16$.
   g) $x^2 - x - \frac{3}{4}$.

4) (Portal da Matemática - OBMEP) Uma piscina, em forma de paralelepípedo, tem como dimensões, em metros, x de largura, $2x$ de comprimento e y de altura. Determine:
   a) A expressão que representa o seu volume.
   b) A expressão que representa sua área total.

c) A quantidade de água, em litros, necessária para enchê-la completamente, sendo $x = 3m$ e $y = 2m$.

Solução:

a) A fórmula do volume de um paralelepípedo é $v = l.c.h$, ou seja, largura vezes o comprimento vezes a altura. Substituindo na fórmula os valores que é dado no enunciado, temos que:

$$v = l.c.h$$

$$v = x.2x.y$$

$$v = 2x^2y$$

b) Para calcular a área total, é necessário calcular o valor de todas as áreas e depois somá-las. Como é uma piscina, devemos calcular a área do fundo (A_b), das duas laterais maiores (A_{l1}) semelhantes e das duas laterais menores (A_l) semelhantes. Substituindo na fórmula, temos o seguinte:

$$A = b.h$$

$$A_t = A_b + A_{l1} + A_l$$

$$A_t = (2x.x) + (2(2x.y)) + (2(x.y))$$

$$A_t = 2x^2 + 4xy + 2xy$$

$$A_t = 2x^2 + 6xy$$

Logo, a área total da piscina é $2x^2 + 6xy$.

c) Vamos substituir na fórmula encontrada em a os valores dados no enunciado, assim temos:

$$v = 2(3)^2.2$$

$$v = 2.9.2$$

$$v = 36\, m^3.$$

4- Intervalo (20 min).

5- Fatoração de polinômios (15 min).

Tabela 23 - Fatoração de polinômios.

Fatoração de polinômios: É o processo utilizado na matemática para expressar um número ou uma expressão algébrica como produto de fatores. Um dos principais métodos de fatoração algébrica é a fatoração por evidência.

Nesse momento, pediremos que os alunos deem dois exemplos de binômios para os escrevermos no quadro. Em seguida, perguntaremos à sala se haveria um fator que fosse comum entre os binômios e como poderíamos expressar esses binômios com o fator comum separado dos demais termos. Nosso objetivo com isso é fazê-los perceber a fatoração dos binômios, colocando o fator comum em evidência.

Tabela 24 - fatoração por evidência.

Fatoração por evidência: Quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio, seja ele apenas um número ou uma letra ou ambos, será colocado sozinho multiplicando os termos restantes entre parênteses. Dentro dos parênteses estará o resultado da divisão da expressão pelo fator comum.

Exemplos:

a) $12x^2 + 3x^4$ tem $3x^2$ como fator comum, então, a forma fatorada seria $3x^2(4 + x^2)$.

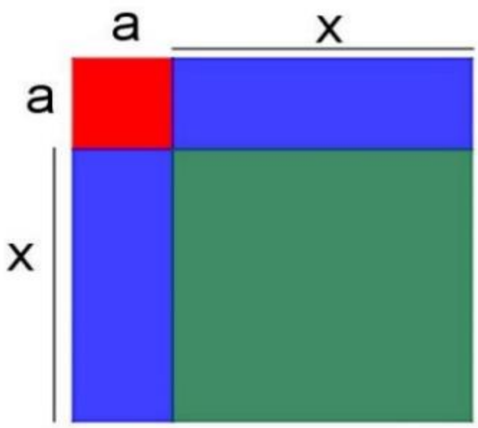
b) $7 - 49x^3$ tem 7 como fator comum, então, a forma fatorada seria $7(1 - 7x^3)$.

6- Produtos notáveis e sua relação com a fatoração (20 min).

Em seguida, com o objetivo de introduzir o conteúdo dos produtos notáveis, entregaremos aos alunos as atividades e discutiremos suas resoluções no quadro.

1 – Dado o quadro abaixo, responda:

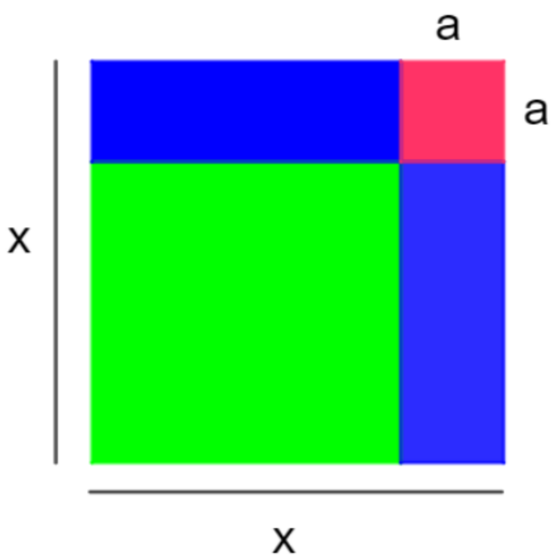
Figura 75 - Ilustração da atividade: cálculo de área.



a) Qual seria a área do retângulo azul e dos quadrados verde e vermelho?
b) E a área do quadrado maior composto pelos quadrados vermelho e verde, e o retângulo azul?

2 – Dado o quadro abaixo, responda:

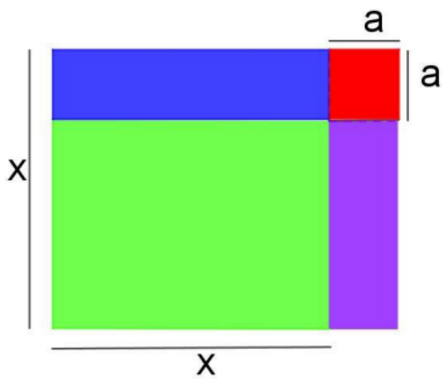
Figura 76 - Ilustração da atividade: cálculo de área.



a) Como seria expressa algebricamente a área do quadrado em verde? Que nome recebe essa expressão?

3 – Dado o quadrado abaixo, responda:

Figura 77 - Ilustração da atividade.



a) Como seria expresso algebricamente as áreas verde e roxa?
b) Somando essas duas expressões de áreas e aplicando a fatoração, que produto obteremos?

Tabela 25 - Produtos notáveis.

Produtos notáveis: São expressões algébricas que aparecem com muita frequência no cálculo algébrico. São utilizados no processo de fatoração de polinômios e no processo de simplificação deles. Os cinco produtos notáveis mais relevantes são: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença.

Existe uma relação entre os produtos notáveis e a fatoração algébrica. Através da fatoração, transformamos a expressão algébrica num produto de fatores polinomiais. Para determinadas expressões, a fatoração leva a um produto notável e, do produto notável, podemos escrever a expressão algébrica novamente utilizando a propriedade distributiva.

Tabela 26 - Quadrado da soma.

Quadrado da soma: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x + a) * (x + a) = (x + a)^2$. O nome quadrado da soma é dado porque a representação por potência desse produto é $(x + a)^2$. Sua expressão algébrica é $(x + a) * (x + a) = x^2 + 2ax + a^2$.

Tabela 27 - Quadrado da diferença.

Quadrado da diferença: É a multiplicação de polinômios do tipo $(x - a) * (x - a) = (x - a)^2$. Sua única diferença com o quadrado da soma é o sinal negativo no termo central. Sua expressão algébrica é $(x - a) * (x - a) = x^2 - 2ax + a^2$.

Tabela 28 - Produto da soma pela diferença.

Produto da soma pela diferença: É o produto notável que envolve um fator binomial com uma soma e outro com uma subtração, $(x+a)*(x-a)$. Sua expressão algébrica é $x^2 - a^2$.

7- Jogo Baralho matemático dos polinômios (40 min).

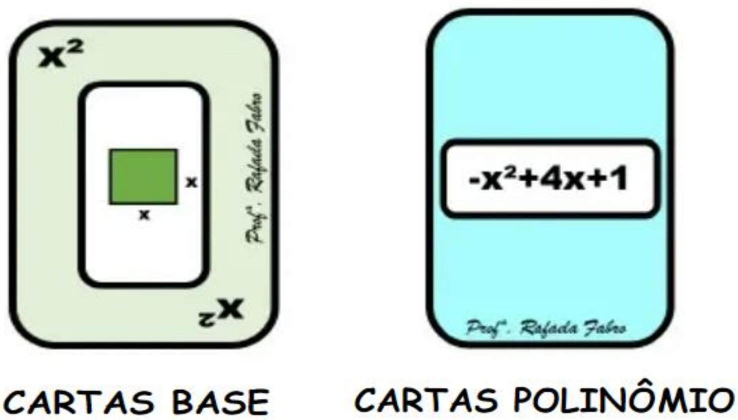
O objetivo deste jogo é entender a formação de polinômios como uma soma ou subtração de diferentes monômios.

Neste baralho, existem cartas base (que ficam na mão de cada jogador) e cartas polinômio, que são as mestras, ou seja, o polinômio a ser formado.

As cartas base são formadas basicamente por monômios, que tem representação algébrica e geométrica. O jogador analisa através da soma ou subtração, e faz associações, com as cartas existentes na mão, tentando formar o polinômio desejado.

Separaremos os alunos em quartetos, e cada grupo receberá um baralho de polinômios. Cada jogador, possuirá 6 cartas na mão. Uma carta polinômio é virada, e os jogadores verificam se é possível formar o polinômio com as cartas que tem à mão, caso não seja possível, cada jogador, na sua vez, compra uma carta, e escolhe outra para descartar, podendo, claro, ser descartada a mesma que ele comprou. Vence o jogador que formar primeiro o polinômio.

Figura 78 - ilustração dos baralho do jogo.



8- Atividades.

1) (Portal da Matemática - OBMEP) A estrutura de um adulto do sexo feminino pode ser estudada através das alturas de seus pais pela expressão

$\frac{(y-13)+x}{2}$. Considere que x é a altura da mãe e y, a do pai, em cm. Somando-se ou subtraindo-se $8{,}5\ cm$ da altura estimada, obtém-se, respectivamente, as alturas máxima e mínima que a filha pode atingir. Segundo essa fórmula, se João tem $1{,}72\ m$ e sua esposa $1{,}64\ m$, quanto sua filha medirá no máximo?

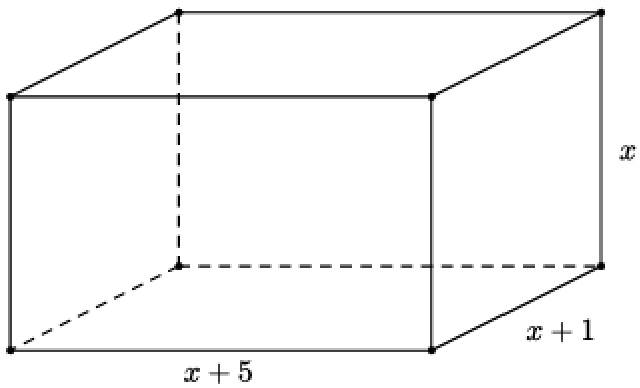
Solução:

Vamos substituir os valores na fórmula que nos é dada e em seguida vamos somar 8,5, pois o exercício nos pede o tamanho máximo. Lembrem-se de converter metro em cm antes de realizar os cálculos.

$$\frac{(y-13)+x}{2}$$

$$\frac{(172-13)+164}{2} = \frac{159+164}{2} = 161{,}5+8{,}5 = 170\ cm.$$

2) (Portal da Matemática - OBMEP) A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo.



Obtenha:

a) a expressão que determina seu volume.

b) a expressão que determina sua área total.

Solução:

Os passos desse exercício são semelhantes ao exercicio 4 da atividade realizada anteriormente. Logo temos que o volume e a área total são:

a)

$$v = c.l.h$$

$$v = (x+5)(x+1)x$$

$$v = (x^2+6x+5)x$$

$$v = x^3+6x^2+5x$$

b)

$$A_1 = 2\big((x+1)(x+5)\big)$$

$$A_1 = 2x^2 + 12x + 10$$

$$A_2 = 2\big((x+1)x\big)$$

$$A_2 = 2x^2 + 2x$$

$$A_3 = 2\big((x+5)x\big)$$

$$A_3 = 2x^2 + 10x$$

$$A_t = 2x^2 + 12x + 10 + 2x^2 + 2x + 2x^2 + 10x$$

$$A_t = 6x^2 + 24x + 10$$

3) Pedro, que adora matemática, resolveu deixar um bilhete para seu amigo. Leia-o e responda:

Em que dia foi escrito o bilhete?

Tabela 29 - Bilhete referente à atividade.

São Paulo**,** $\left(\sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}$ de maio de *MMIX.*
Caro amigão,
Acabei de fazer uma lição de Matemática....

Solução:

Podemos descobrir o dia, representado pela expressão $\left(\sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}$ calculando os dois quadrados. $\left(\sqrt{2}+1\right) * \left(\sqrt{2}+1\right) + \left(\sqrt{2} - 1\right) * \left(\sqrt{2} - 1\right)$

$$\left(\sqrt{4} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1\right)$$

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right) + \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 6$$

O bilhete foi escrito no dia 6.

4) A área de um retângulo é dada pela expressão $2x^2 + 4x$, e um dos lados é $2x$. Qual é a expressão que dá o outro lado?

Solução:

Para achar o lado do triângulo que está faltando, temos: $A = B * h$, então $2x^2 + 4x = 2x * h$, podemos dividir ambos os lados da equação para isolar o *h*, que é o que queremos descobrir:

$$h = \frac{2x^2+4x}{2x} \quad \text{ou} \quad h = x + 2$$

5) Coloque em evidência o fator comum:

a) $mx + nx - px$

b) $20x^2 + 25x$

c) $4m^3 \; - \; 6m^2$

d) $a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3$

Gabarito:

a) $x(m + n - p)$

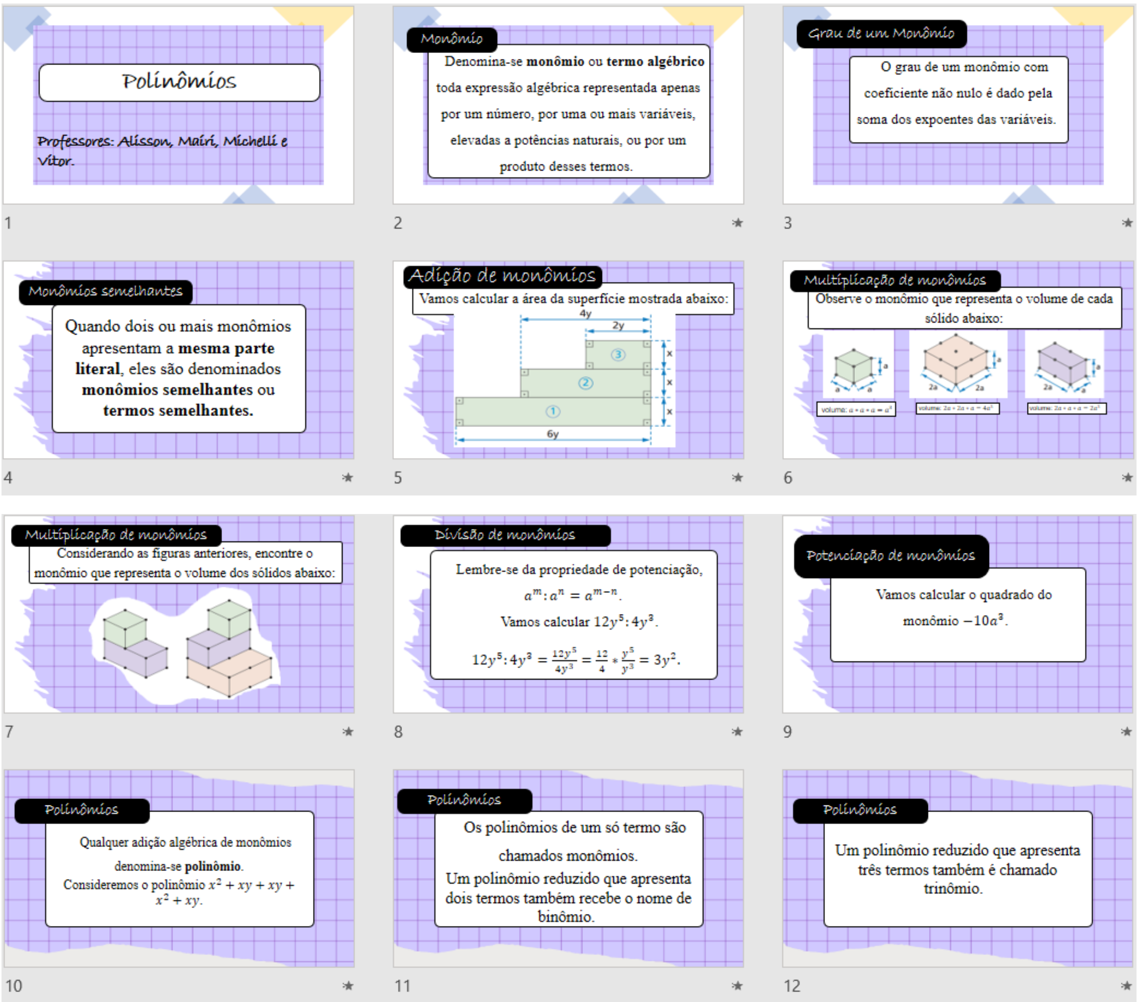
b) $5x(4x + 5)$

c) $2m(2m^2 - 3m)$

d) $abc((a^2 + b + c) + (a + b^2 + c) + (a + b + c^2))$.

Slides

Figura 79 - Slides utilizados em aula.



11.2 Material entregue aos alunos

Figura 80 - Material entregue aos alunos.

PROMAT

Polinômios

- **Questões**

1) (Portal da Matemática - OBMEP) Sejam os polinômios $P = x^2 + 3x - 4$ e $Q = x^2 + 2$. Determine:

a) $P + Q$.
b) $P - Q$.

2) (Portal da Matemática - OBMEP) Resolva os Produtos:

a) $(x+1) \cdot (x+2)$
b) $(x+3) \cdot (x+9)$
c) $(x-2) \cdot (x+3)$
d) $(x-4) \cdot (x+4)$
e) $(x+5) \cdot (x+5)$
f) $(x-4) \cdot (x-4)$
e) $\left(x+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x-\frac{3}{2}\right)$

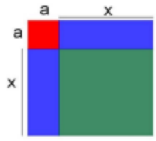
3) (Portal da Matemática - OBMEP) Uma piscina, em forma de paralelepípedo, tem como dimensões, em metros, x de largura, $2x$ de comprimento e y de altura. Determine:

a) A expressão que representa o seu volume.
b) A expressão que representa sua área total.
c) A quantidade de água, em litros, necessária para enchê-la completamente, sendo $x = 3m$ e $y = 2m$.

Fatoração e Produtos Notáveis

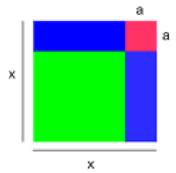
- **Questões**

1) Dado o quadro abaixo, responda:



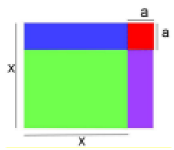
a) Qual seria a área do retângulo azul e dos quadrados verde e vermelho?
b) E a área do quadrado maior (composto pelos quadrados vermelho e verde, e o retângulo azul)?

2) Dado o quadro abaixo, responda:



Como seria expressa algebricamente a área do quadrado em verde? Que nome recebe essa expressão?

3 – Dado o quadrado abaixo, responda:

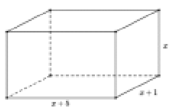


a) Como seria expresso algebricamente as áreas verde e roxa?
b) Somando essas duas expressões de áreas e aplicando a fatoração, que produto obteremos?

Atividades de revisão

1) (Portal da Matemática - OBMEP) A estrutura de um adulto do sexo feminino pode ser estudada através das alturas de seus pais pela expressão $\dfrac{(y-13)+x}{2}$. Considere que x é a altura da mãe e y, a do pai, em cm. Somando-se ou subtraindo-se 8,5 cm da altura estimada, obtém-se, respectivamente, as alturas máxima e mínima que a filha pode atingir. Segundo essa fórmula, se João tem 1,72 m e sua esposa 1,64 m, quanto sua filha medirá no máximo? (verdade isso?)

2) (Portal da Matemática - OBMEP) A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo.



a) a expressão que determina seu volume.
b) a expressão que determina sua área total

3) Pedro, que adora matemática, resolveu deixar um bilhete para seu amigo. Leia-o e responda:

Em que dia foi escrito o bilhete?

São Paulo, $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ de maio de MMIX.
Caro amigão,
Acabei de fazer uma lição de Matemática....

4) A área de um retângulo é dada pela expressão $2x^2 + 4x$, e um dos lados é $2x$. Qual é a expressão que dá o outro lado?

5) Coloque em evidência o fator comum:

a) $mx + nx - px$

b) $20x^2 + 25x$

c) $4m^3 - 6m^2$

d) $a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3$

11.3 Relatório

7° ENCONTRO (04/11/2023)

Sala A209

<u>Grupo de estagiários:</u> Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 04 de novembro de 2023, iniciou-se o sétimo encontro do PROMAT, em que abordamos os conteúdos de polinômios, produtos notáveis e fatoração algébrica.

Iniciamos a aula corrigindo as questões da lista de revisão, a qual foi entregue no final da aula passada. Após corrigir as atividades e esclarecer as dúvidas que surgiram, o Professor Vitor deu continuidade na aula falando sobre monômios e polinômios. Durante sua explicação, ele utilizou diversos exemplos que ajudaram com as dúvidas que surgiram. Em seguida, foram entregues aos alunos uma lista com exercícios referente ao assunto. No decorrer dessa atividade, os estagiários circularam pela sala para tirar as dúvidas que iam surgindo. Após o tempo determinado para a realização de tal atividade ter se esgotado, realizamos a correção na lousa e, ao finalizar, liberamos os alunos para o intervalo.

Ao retornarmos, o conteúdo de fatoração e produtos notáveis. Seguimos o mesmo modelo da aula, explicamos o conteúdo, demos exemplos e em seguida estipulamos um tempo para que eles realizassem as atividades referentes aos assuntos abordados. Em uma das atividades foi preciso nos adaptar a um pequeno imprevisto, pois colocamos figuras coloridas e acabamos nos esquecendo que a impressão do material foi feita em escalas de cinza. Nesse momento, foi necessário projetar as figuras para auxiliar os alunos a realizarem a atividade, além disso, também os auxiliamos durante a resolução da atividade.

Depois de finalizar os exercícios, propomos o jogo chamado de Baralho Matemático dos Polinômios para encerrar o encontro. Como poucos alunos vieram para essa aula, os professores também participaram do jogo para poder completar dois grupos. Os alunos gostaram da proposta e, ao final da aula, queriam jogar mais uma rodada, porém já estava no horário e, assim, encerramos esse encontro.

12. Encontro 8

12.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 8 – 11/11

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Geometria dos triângulos.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Relembrar conceitos geométricos no plano que fazem relação com o estudo dos triângulos, além de revisar seus tipos e suas propriedades.

Objetivos específicos:

- Classificar os triângulos a partir da medida de seus lados ou da medida de seus ângulos internos;
- Compreender os principais resultados da geometria plana que se relacionam com o estudo de triângulos;
- Compreender e aplicar as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, além dos ângulos notáveis;
- Resolver problemas relacionados aos assuntos trabalhados envolvendo triângulos.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, lápis, borracha, caderno, notebook, projeção de slides, atividades impressas.

Encaminhamento metodológico:

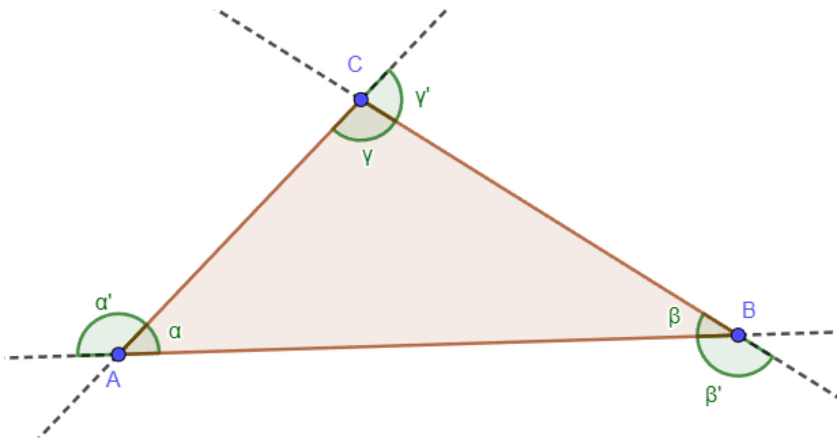
1. **Correção das atividades da aula anterior (30 min).**

   Retomaremos alguns conceitos da aula anterior através da correção das atividades deixadas como tarefa de casa.

2. **Introdução de Triângulos (30 min).**

   Triângulo é um polígono de três lados. Notação: ΔABC

Figura 81 - Triângulo.



Principais elementos de um triângulo:

Vértices: A, B, C

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$

Ângulos internos: α, β, γ

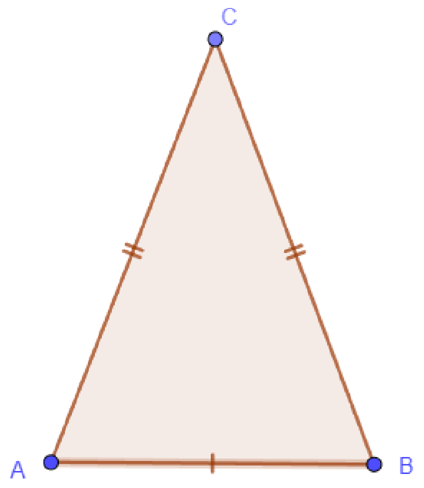
Ângulos externos: α', β', γ'

Classificação de triângulos: podemos classificar os triângulos quanto às medidas dos lados e dos ângulos. Classificando pela medida dos lados, temos três casos para analisar: equilátero, isósceles e escaleno.

Isósceles: pelo menos dois lados são congruentes.

$$\overline{BC} \cong \overline{CA}$$

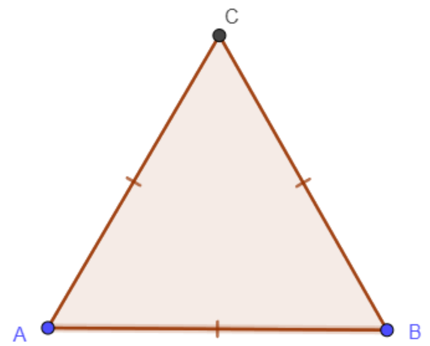
Figura 82 - Triângulo isóceles.



Equilátero: os três lados são congruentes.

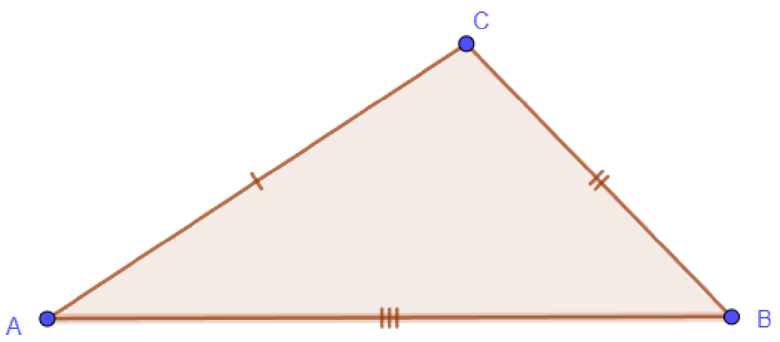
$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$$

Figura 83 - Triângulo equilátero.



Escaleno: não possui lados congruentes.

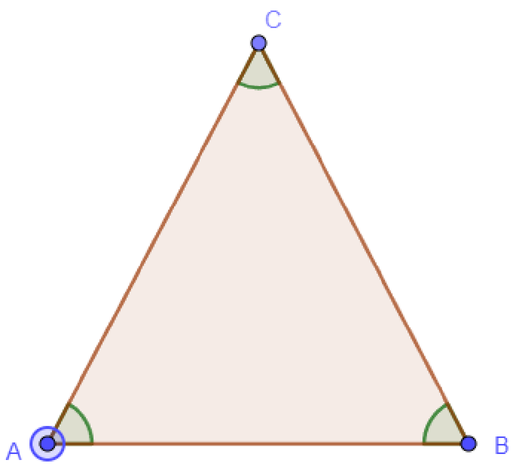
Figura 84 - Triângulo escaleno.



Classificação pela medida dos ângulos internos, também temos três casos: acutângulo, retângulo, obtusângulo.

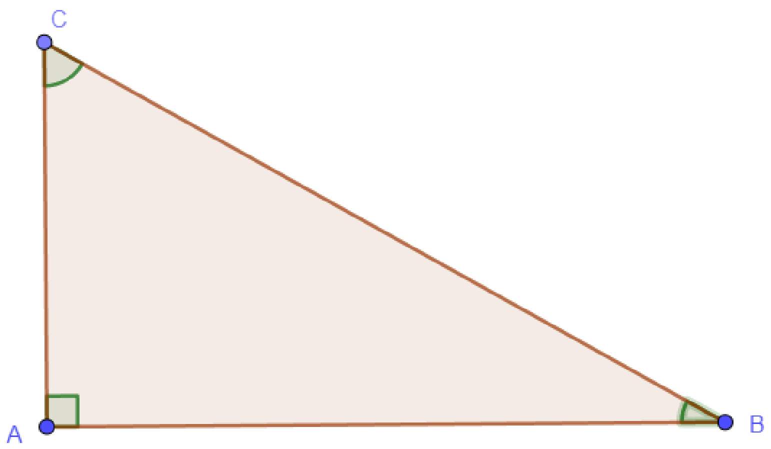
Acutângulo: os três ângulos internos são agudos.

Figura 85 - Triângulo acutângulo.



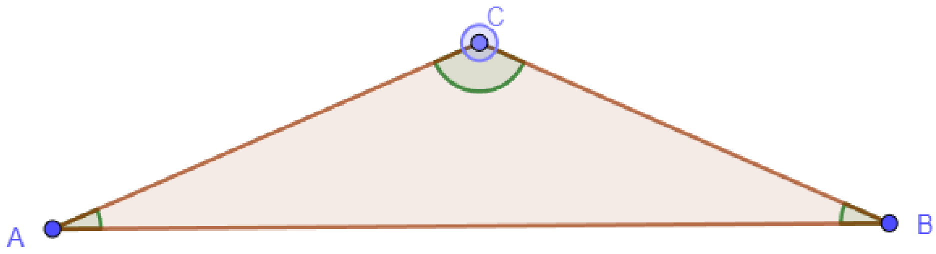
Retângulo: tem um ângulo interno reto e dois ângulos internos agudos.

Figura 86 - Triângulo retângulo.



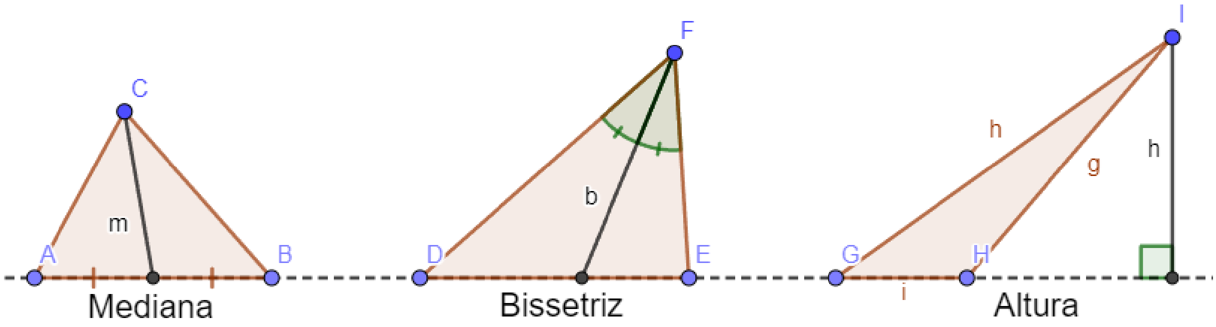
Obtusângulo: tem um ângulo interno obtuso e dois ângulos internos agudos.

Figura 87 - Triângulo obtusângulo.



Cevianas notáveis: denomina-se **ceviana** qualquer segmento com uma extremidade de um vértice de um triângulo e a outra na reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Figura 88 - Ilustração: mediana, bissetriz e altura.



Mediana: ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

Bissetriz: ceviana que divide um dos ângulos internos em dois ângulos congruentes.

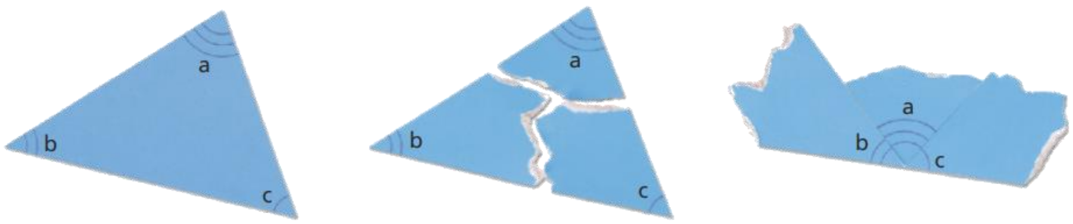
Altura: ceviana perpendicular a reta suporte de um dos lados.

Experimento da soma dos ângulos internos.

Solicitaremos para os alunos desenharem em uma folha de papel um triângulo. E então marcar cada ângulo de uma forma diferente, pode ser com cores ou traços diferentes.

Após isso, pediremos para eles recortarem o triângulo da folha e depois rasgarem o papel em três partes, cada uma contendo um ângulo. Então eles devem juntar os vértices em um único ponto e verificar que os três ângulos formam um ângulo de 180°.

Figura 89 - Ilustração: experimento do ângulo.



E então definir que **a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180°**.

A **área do triângulo** é dada por:

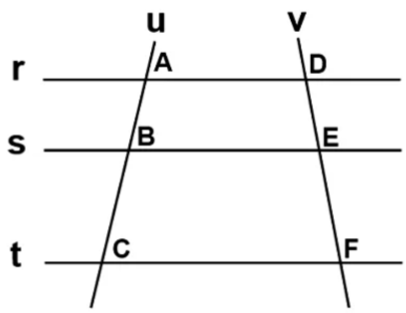
$$\frac{b * h}{2}.$$

E o **perímetro** é a soma das medidas dos lados do triângulo.

3. Geometria do Triângulo (20 min).

Teorema de Tales:

Figura 90 - Ilustração do teorema de Tales.



Na figura acima as retas transversais u e v interceptam as retas paralelas r, s e t. Os pontos pertencentes na reta u são: A, B e C; e na reta v, os pontos: D, E e F. Logo, de acordo com o Teorema de Tales:

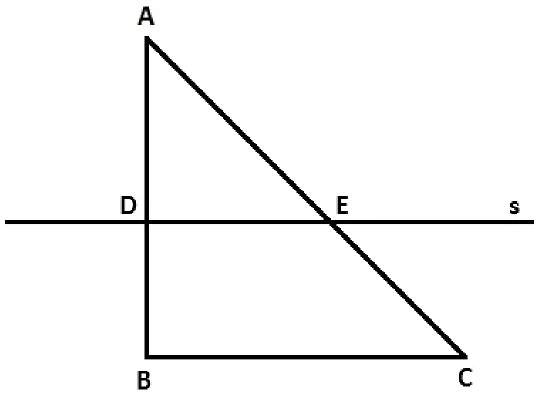
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Lê-se: AB está para BC, assim como DE está para EF.

Teorema de Tales nos Triângulos

O teorema de Tales também é aplicado em situações que envolvem triângulos. Veja abaixo um exemplo em que se aplica o teorema:

Figura 91 - Ilustração: Aplicação do teorema de Tales .



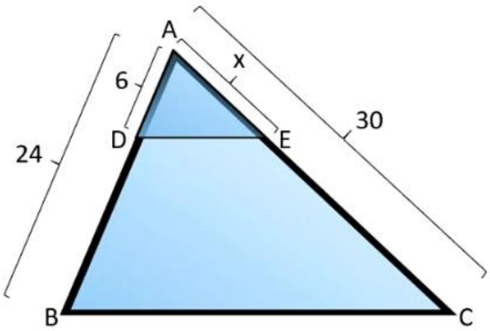
De acordo com a semelhança de triângulos podemos afirmar que: o triângulo ABC é semelhante ao triângulo AED. É representado da seguinte forma:

$$\Delta ABC \sim \Delta AED$$

Exemplo:

Determine a medida x indicada na imagem.

Figura 92 - Ilustração: Aplicação do teorema de Tales.



Aplicando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{30} = \frac{6}{24}$$

$$24x = 6 \cdot 30$$

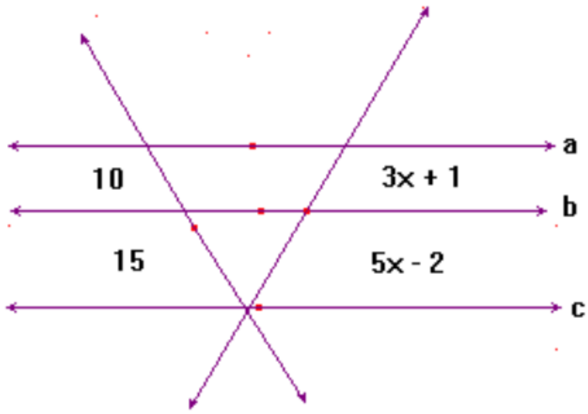
$$24x = 180$$

$$x = \frac{180}{24} = 7{,}5$$

4. Atividades. (20 min)

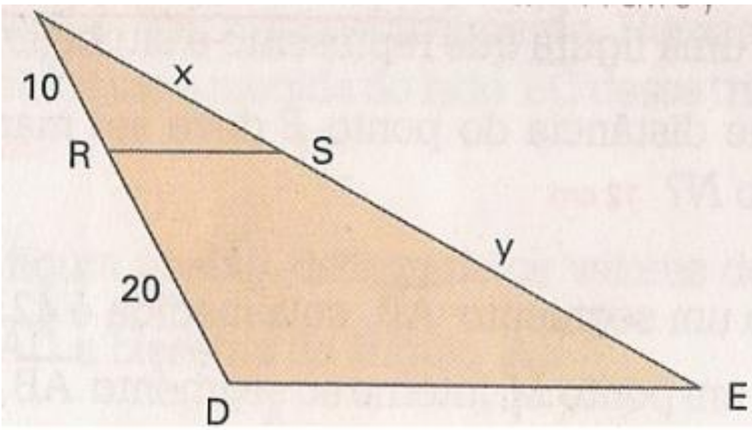
1- Descubra o valor de x das figuras abaixo utilizando o Teorema de Tales:

Figura 93 - Ilustração da atividade: teorema de Tales.



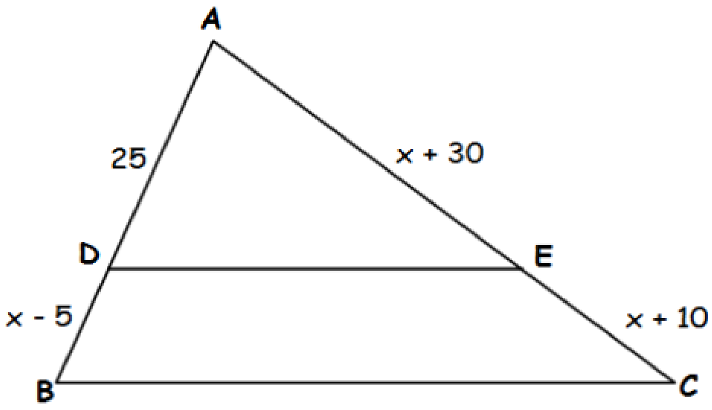
2 - Na figura abaixo, sabe-se que $RS \parallel DE$ e que $AE = 42$ cm. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.

Figura 94 - Ilustração da atividade: teorema de Tales.



3 – No triângulo ABC da figura, sabe-se que $DE \parallel BC$. Calcule as medidas dos lados AB e AC do triângulo.

Figura 95 - Ilustração da atividade: teorema de Tales.



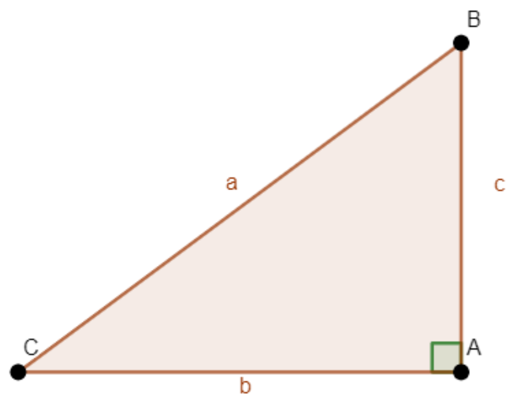
5. **Intervalo. (20 min).**

6. **Relações métricas em um triângulo retângulo (30 min).**

   Teorema de Pitágoras (Primeira relação métrica):

   O teorema de Pitágoras estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Observe o triângulo retângulo a seguir:

Figura 96 - Ilustração: primeira relação métrica.



Nesse triângulo, $\overline{BC}$ é a hipotenusa e $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são os catetos.

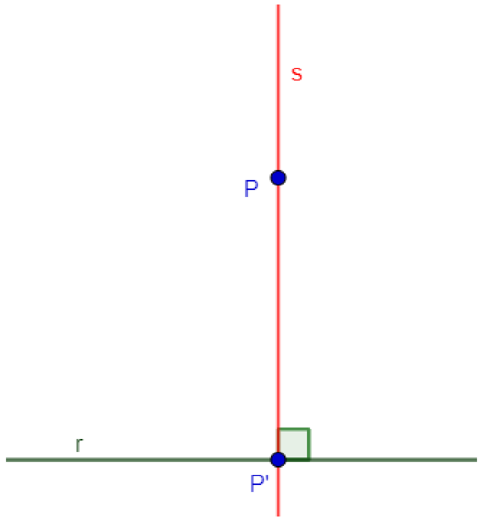
Em qualquer triângulo retângulo, o maior lado chama-se hipotenusa e os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos.

O teorema de Pitágoras diz que: Em um triângulo retângulo qualquer, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Assim temos: $b^2 + c^2 = a^2$.

Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta:

Considere um ponto *P* e uma reta *r*. Ao traçar a reta *s*, perpendicular a reta *r* e passando pelo ponto *P*, obtemos o ponto *P'*. O ponto *P'* é a projeção ortogonal do ponto *P* sobre a reta *r*. Se o ponto pertence a reta, ele coincide com sua projeção ortogonal sobre a reta.

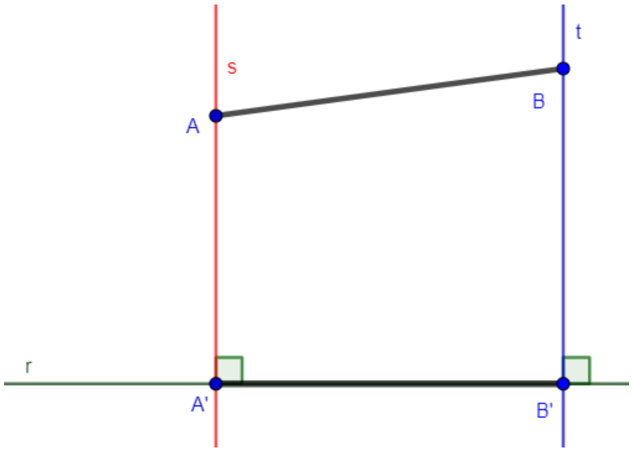
Figura 97 - Projeção ortogonal de um ponto.



Projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta:

Considere um segmento $\overline{AB}$ e uma reta *r*. O ponto *A'* é a projeção ortogonal do ponto *A* sobre a reta *r*, e o ponto *B'* é a projeção ortogonal do ponto *B* sobre a reta r. Dessa forma, $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta *r*.

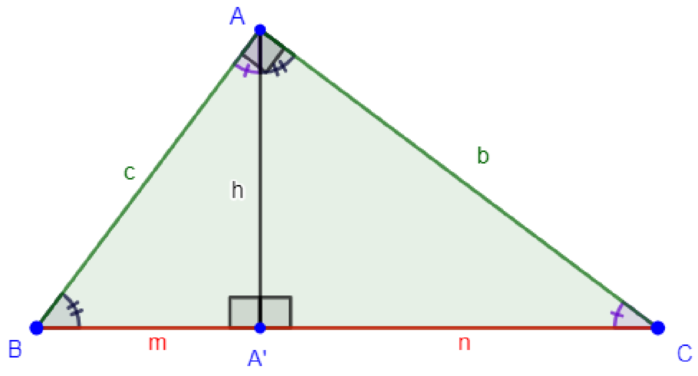
Figura 98 - Projeção ortogonal de um segmento.



Segunda relação métrica:

Em um triângulo retângulo qualquer, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa. Dado o seguinte triângulo retângulo:

Figura 99 - Ilustração: segunda relação métrica.



Ao traçar a projeção ortogonal do ponto C sobre o segmento $\overline{AB}$, obtemos dois triângulos semelhantes pelo caso AA. Através da semelhança, podemos escrever a seguinte proporção entre os lados homólogos (lados opostos a ângulos correspondentes congruentes):

$\frac{AB}{A\prime B} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{A\prime A}$, que é equivalente a $\frac{c}{m} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h}$. Da igualdade $\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$, temos:

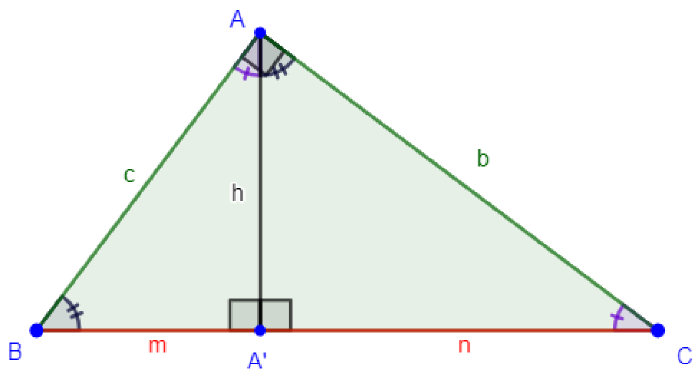
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}, \text{ou seja, } \mathrm{b} \times \mathrm{c} = \mathrm{a} \times \mathrm{h}.$$

Terceira relação métrica:

Em um triangulo retângulo qualquer, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre a hipotenusa.

Analisando os triângulos semelhantes ABC e A'BA, vimos que:

Figura 100 - Ilustração: terceira relação métrica.



$\frac{AB}{A\prime B} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{A\prime A}$, que é equivalente a $\frac{c}{m} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h}$. Da igualdade $\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$, temos:

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c}, \text{ou seja, } c^2 = \mathrm{a} \times \mathrm{m}.$$

Agora, vamos considerar os triângulos ABC e C'AC, os quais são semelhantes. Podemos escrever a seguinte proporção entre os lados homólogos:

$\frac{AB}{C'A} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{C'C}$, que equivale a $\frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$. Da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$, temos:

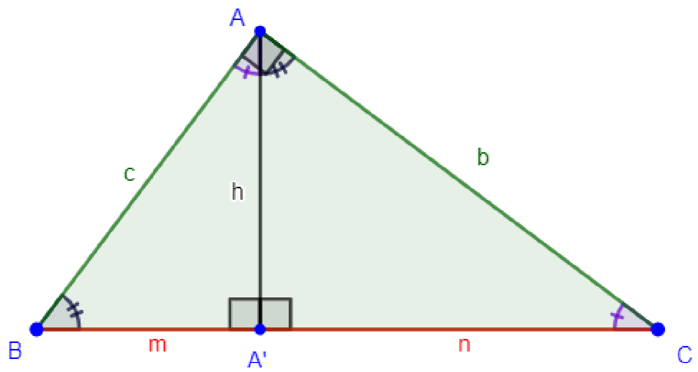
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}, \text{ou seja, } b^2 = \mathrm{a} \times \mathrm{n}.$$

Quarta relação métrica:

Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

Considerando agora, no triângulo ABC, os triângulos semelhantes A'BA e A'AC, podemos escrever a seguinte proporção entre os lados homólogos:

Figura 101 - Ilustração: quarte relação métrica.



$\frac{A'B}{A'A} = \frac{A'A}{A'C} = \frac{BA}{AC}$, que equivale a $\frac{m}{h} = \frac{h}{n} = \frac{c}{b}$. Da igualdade $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$, temos:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}, \text{ou seja, } h^2 = \mathrm{m} \times \mathrm{n}.$$

Exemplos de aplicações do teorema de Pitágoras:

Diagonal de um quadrado: Dado um quadrado cujo lado (l) é conhecido, temos que sua diagonal vale $l\sqrt{2}$.

Altura de um triângulo equilátero: dado um triângulo equilátero cujo lado (l) é conhecido, temos que sua altura mede $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.

7. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo. (20 min)**

Tabela 30 - Razões trigonométricas.

Razões trigonométricas

- Trigonometria vem do grego *trígono,* que significa “triangular”, e *metria*, que significa “medida”.
- Surgiu como elemento de apoio na solução de problemas práticos de astronomia, agrimensura e navegação.

Tabela 31 - Informações sobre Hiparco.

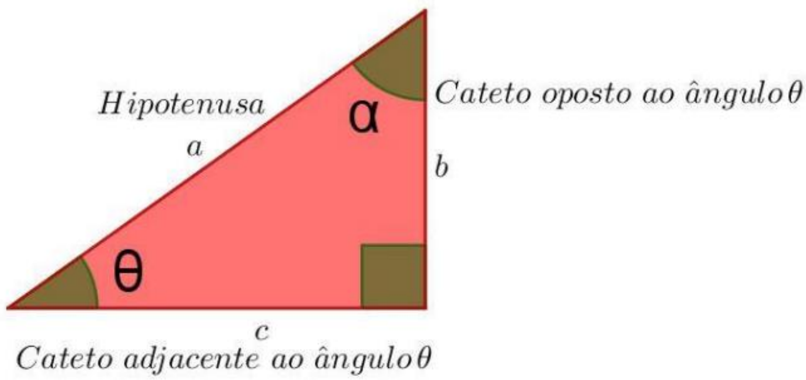
Hiparco – astrônomo grego(190 a.c – 125 a.c)

- Catalogou aproximadamente 1000 estrelas.
- Calculou a distância da terra à lua com erro inferior a 10%.
- Teria sido o primeiro a utilizar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.
- É considerado o precursou da trigonometria.
- Atualmente a trigonometria tem vasta aplicação na topografia, na aviação e nas engenharias.

Tabela 32 - Razões trigonométricas.

Razões trigonométricas

São resultados de divisões entre as medidas de dois lados de um triângulo retângulo. Elas são capazes de relacionar os lados com os ângulos de um triângulo retângulo. Uma razão trigonométrica relacionada com um determinado ângulo terá um valor fixo para qualquer triângulo, independentemente do tamanho de seus lados, pois, como eles são proporcionais, a razão entre os lados correspondentes será igual.



Assim, definiremos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo θ, como sendo:

$$sen\ \theta = \frac{Cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$cos\ \theta = \frac{Cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

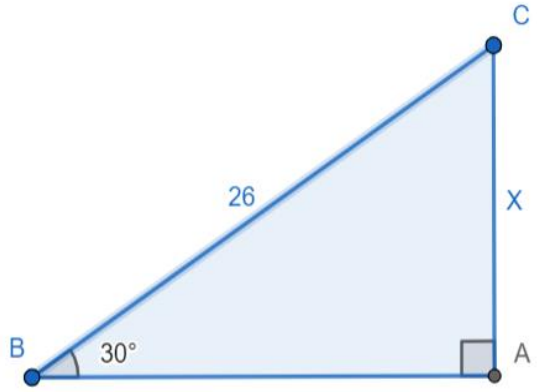
$$Tg\ \theta = \frac{Cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta}{Cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \theta} = \frac{b}{c}$$

Ângulos notáveis

	30°	**45°**	**60°**
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- Determine o valor x no triângulo abaixo.

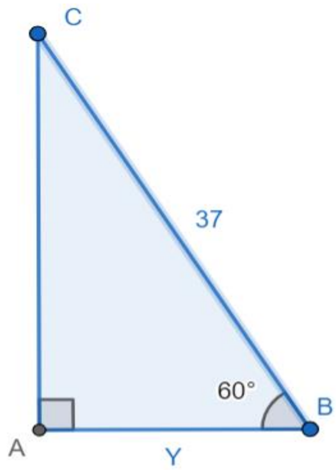
Figura 102 - Atividade de ângulos notáveis.



$$sen\ 30° = \frac{x}{26} \rightarrow x = 26\ *\ sen\ 30°\ \rightarrow x = 26\ *\ \frac{1}{2} = 13$$

- Determine o valor de y.

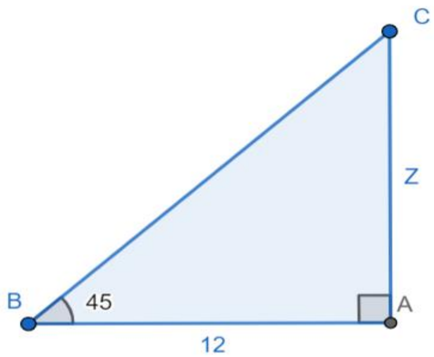
Figura 103 - Atividade de ângulos notáveis.



$$cos\ 60° = \frac{y}{37} \rightarrow y = 37\ *\ cos\ 60°\ \rightarrow y = 37\ *\ \frac{1}{2} = 18{,}5$$

- Determine o valor de z.

Figura 104 - Atividade de ângulos notáveis.



$$tg\ 45° = \frac{z}{12} \rightarrow z = 12\ *\ tg\ 45°\ \rightarrow z = 12\ *\ 1 = 12$$

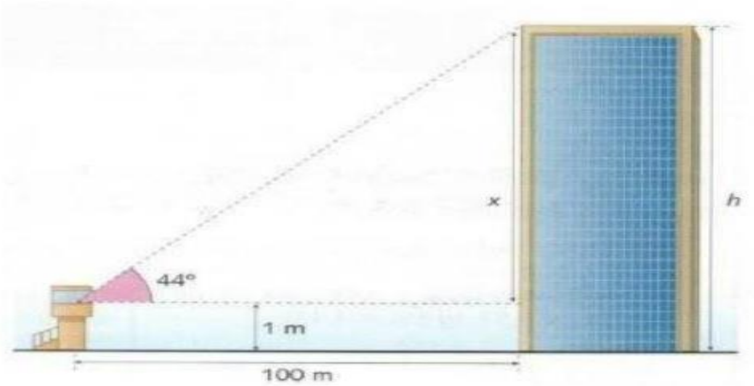
8. Atividades.

1) De um posto de observação situado a 100m de um prédio, vê-se o ponto mais alto desse prédio sob um ângulo de 44°. Determine a medida da altura do prédio, sabendo que o posto está a 1m do solo.

(Utilize: sen 44°=0,69; cos 44°=0,72; tg 44°=0,97).

Resolução:

Figura 105 - Altura do prédio.



Como x corresponde ao cateto oposto ao ângulo de 44°, podemos escrever:

$$tg\ 44° = \frac{x}{100} \to x = 100\ *\ tg\ 44° \to x = 100\ *\ 0,97 \to x = 97$$

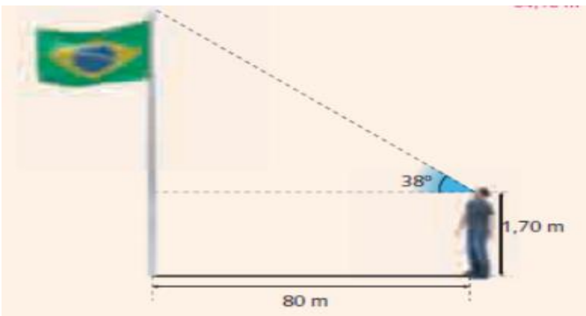
Então: $h = x + 1$, substituindo x temos: $h = 97 + 1 = 98$

Portanto a medida da altura do prédio é 98 m.

2) Um observador, distante 80 m do mastro de uma bandeira, vê seu ponto mais alto sob o ângulo de 38°. A distância dos olhos dele ao chão é de 1,70 m. Qual é a medida aproximada da altura do mastro?

Resolução:

Figura 106 - Altura do mastro.



$tg\ 38° = \frac{x}{80} \to\ 0,78 = \frac{x}{80}$, então: $80\ *\ 0,78\ \to x = 62,40$

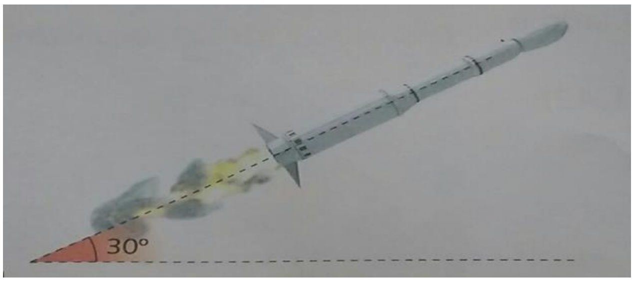
$$62,40\ + 1,70 = 64,10\ m$$

Portanto a altura total do mastro é 64,10 m.

3) Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo, sob um ângulo de 30°. A que altura estará o foguete após percorrer 8 km em linha reta?

Resolução:

Figura 107 - Lançamento do foguete.

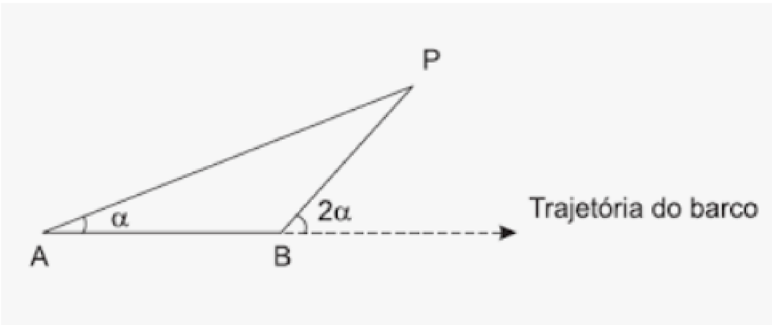


Como queremos saber a altura, e sabemos que o foguete percorreu 8 km temos: $sen\ 30° = \frac{x}{8} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \rightarrow x = 8 * \frac{1}{2} \rightarrow x = 4$

Portanto a altura será de 4 km.

4) (Enem 2011). Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A,* mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B* de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

Figura 108 - Trajetória do barco.

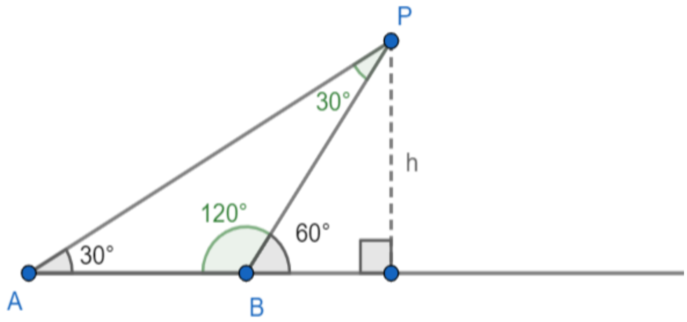


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\ M$. Com base nesses dados e mantendo a trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* será:

Resolução:

Se $\alpha = 30 \ \rightarrow 2\alpha = 60$, e se o barco está percorrendo a semirreta, no sentido de *A* para *B,* a menor distância será quando for formado uma linha 90° ligando o ponto P à semirreta.

Figura 109 - resposta.



Como no primeiro triângulo temos que a soma de seus ângulos é 180° e dois lados são iguais, ou seja, dois lados com *30°,* logo este triângulo é isóscele, e como a medida do ângulo *30° P é 2000*, a medida do ângulo oposto ao ângulo *30° A* também é *2000.*

Agora calculamos o seno de 60°. $sen\,60° = \frac{h}{2000} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2000} \rightarrow 2h = \sqrt{3} * 2000$

Então $h = \sqrt{3} * 1000$, que é a menor distância do ponto P ao barco.

5) (UNAMA-PA) Num triângulo *ABC* são dados a hipotenusa $a = 12\ cm$ e o ângulo agudo $c = 30°$. Podemos afirmar que a área desse triângulo vale:

a) $14\sqrt{3}\ cm^2$

b) $16\sqrt{3}cm^2$

c) $18\sqrt{3}cm^2$

d) $20\sqrt{3}cm^2$

e) $22\ cm^2$

6) (UF-SE) Se os raios solares formam um ângulo α com o solo, qual é, aproximadamente, o comprimento da sombra de um edifício com *10 m* de altura?

$$\left(Dado: sen\ \alpha = \frac{3}{5}\right)$$

a) 16,6m

b) 15,5m

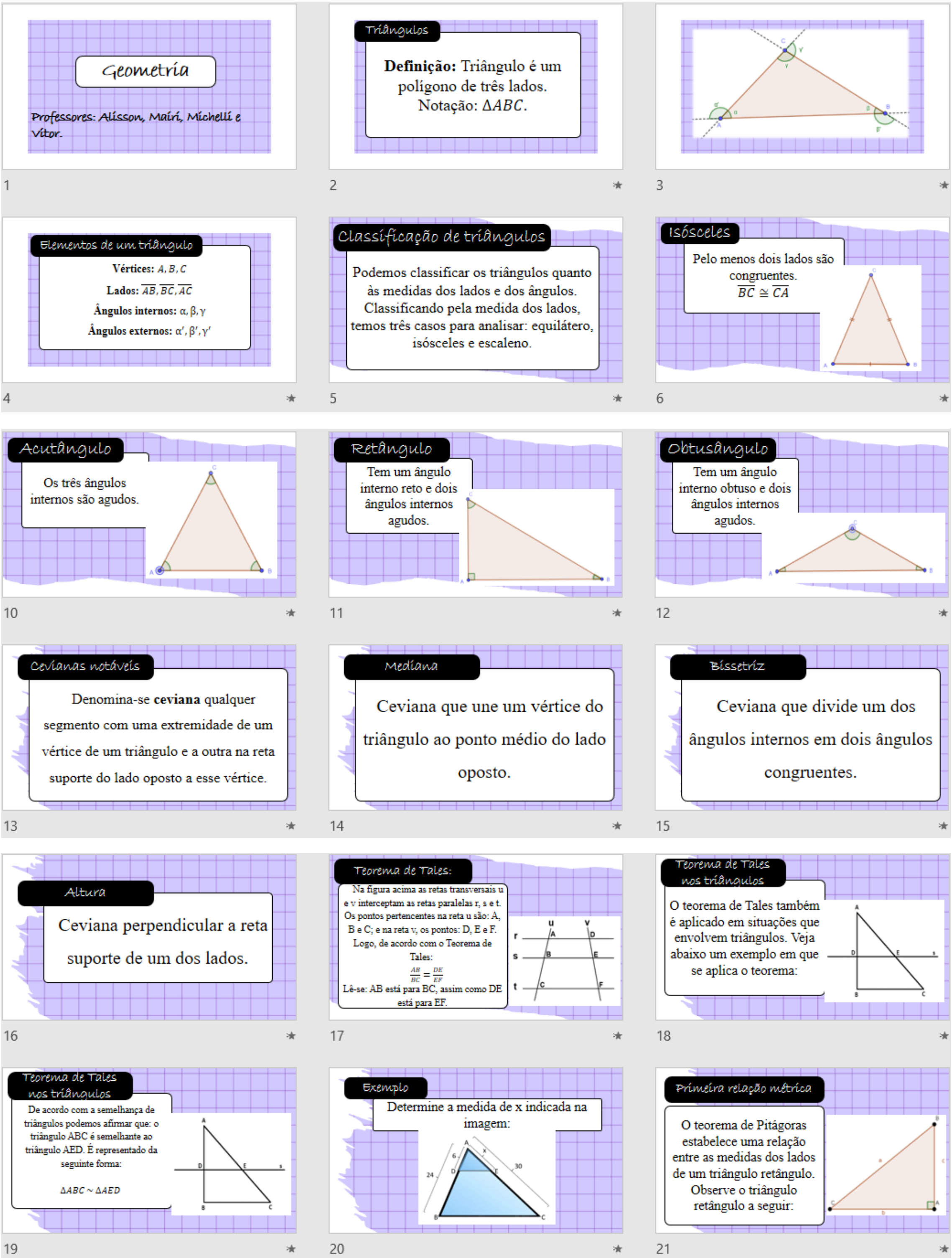
c) 14,4m

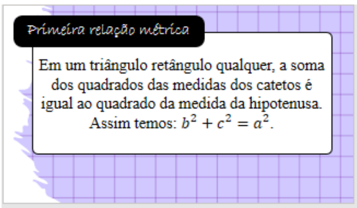
d) 13,3m

e) 12,2m

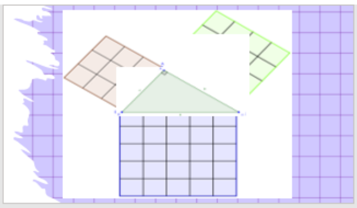
Slides

Figura 110 - Slides utilizados em aula.

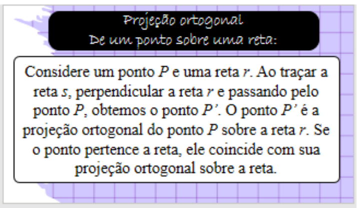




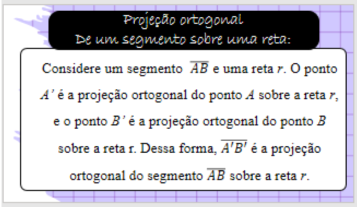
22



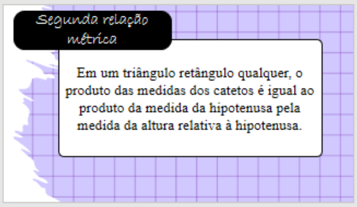
23



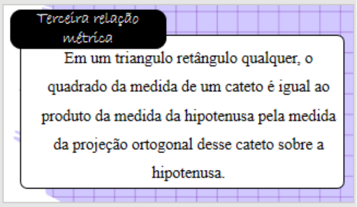
24



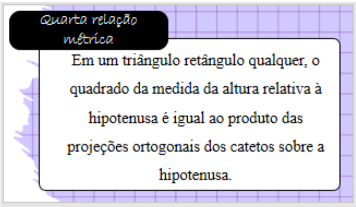
25



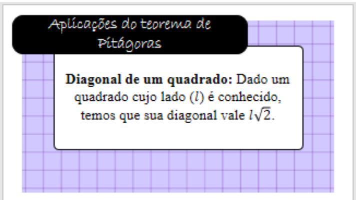
26



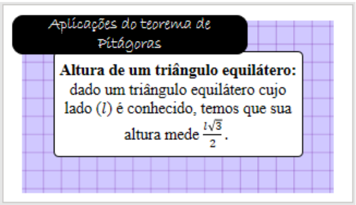
27



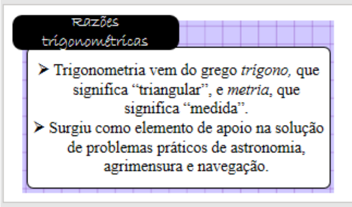
28



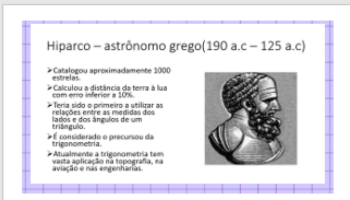
29



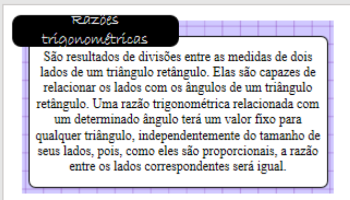
30



31

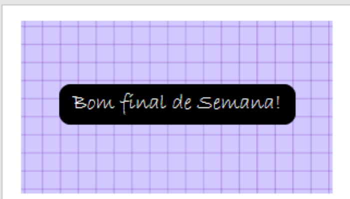


32



33

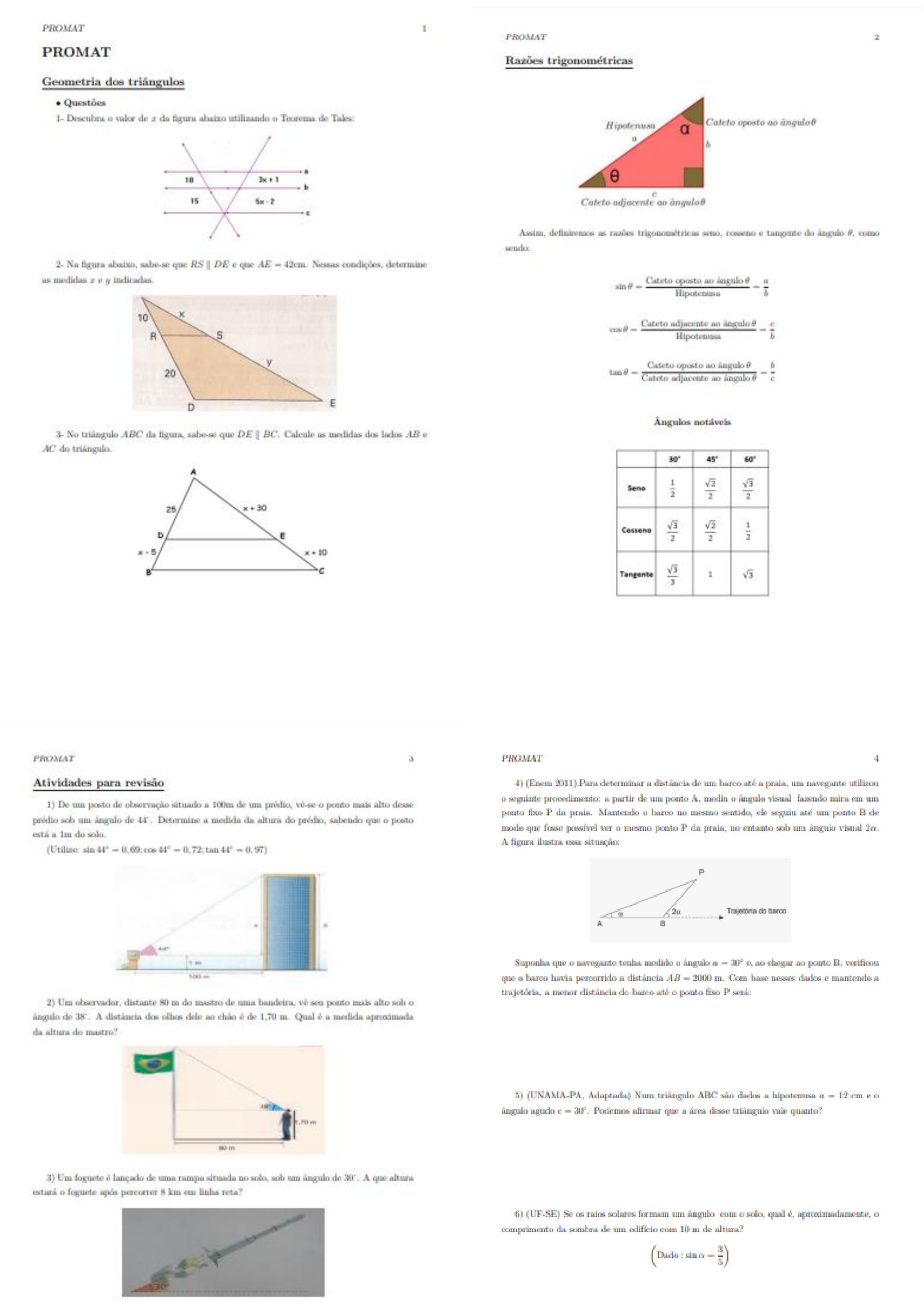
34



35

12.2 Material entregue aos alunos

Figura 111 - Material entregue aos alunos.



PROMAT 1

PROMAT

Geometria dos triângulos

- **Questões**

1- Descubra o valor de x da figura abaixo utilizando o Teorema de Tales:

2- Na figura abaixo, sabe-se que $RS \parallel DE$ e que $AE = 42$cm. Nessas condições, determine as medidas x e y indicadas.

3- No triângulo ABC da figura, sabe-se que $DE \parallel BC$. Calcule as medidas dos lados AB e AC do triângulo.

PROMAT 2

Razões trigonométricas

Assim, definiremos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente do ângulo θ, como sendo:

$$\sin\theta = \frac{\text{Cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{Cateto adjacente ao ângulo } \theta} = \frac{b}{c}$$

Ângulos notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PROMAT 3

Atividades para revisão

1) De um posto de observação situado a 100m de um prédio, vê-se o ponto mais alto desse prédio sob um ângulo de 44°. Determine a medida da altura do prédio, sabendo que o posto está a 1m do solo.

(Utilize: $\sin 44° = 0,69; \cos 44° = 0,72; \tan 44° = 0,97$)

2) Um observador, distante 80 m do mastro de uma bandeira, vê seu ponto mais alto sob o ângulo de 38°. A distância dos olhos dele ao chão é de 1,70 m. Qual é a medida aproximada da altura do mastro?

3) Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo, sob um ângulo de 30°. A que altura estará o foguete após percorrer 8 km em linha reta?

PROMAT 4

4) (Enem 2011).Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

5) (UNAMA-PA, Adaptada) Num triângulo ABC são dados a hipotenusa $a = 12$ cm e o ângulo agudo $c = 30°$. Podemos afirmar que a área desse triângulo vale quanto?

6) (UF-SE) Se os raios solares formam um ângulo com o solo, qual é, aproximadamente, o comprimento da sombra de um edifício com 10 m de altura?

$$\left(\text{Dado} : \sin\alpha = \frac{3}{5}\right)$$

12.3 Relatório

8° ENCONTRO (11/11/2023)

Sala A209

<u>Grupo de estagiários:</u> Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 11 de novembro de 2023, iniciou-se o oitavo encontro do PROMAT, em que abordamos os conteúdos de geometria, com foco nos triângulos.

Iniciamos a aula corrigindo as questões da lista de revisão, que foi entregue no final da aula passada. Enquanto o professor Alisson corrigia a lista, a professora Michelli teve que correr ao LEM para pegar uma régua grande que havia esquecido. Após corrigir as atividades, demos continuidade na aula falando sobre a classificação dos triângulos e das cevianas notáveis. Durante a explicação, foram utilizados triângulos de cartolina e desenhos feitos no quadro pelos professores, de forma que auxiliasse visualmente os alunos. Em seguida, realizamos o experimento que mostra que a soma de seus ângulos internos sempre resulta em 180º. No decorrer dessa atividade, os estagiários circularam pela sala para auxiliar os alunos com materiais como: tesoura, régua e caneta colorida para diferenciar os ângulos. Após o tempo determinado para a realização de tal atividade ter se esgotado, liberamos os alunos para o intervalo.

Ao retornarmos, explicamos como utilizar o teorema de Tales e as relações métricas presentes em um triângulo retângulo. Nesse momento, utilizamos a lousa para mostrar as semelhanças de triângulos e a utilidade de cada relação. Em seguida, foram apresentadas as razões trigonométricas presentes no triângulo retângulo; abordamos esse tema contando uma breve história sobre Hiparco e sua importância, e falamos sobre as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente. Como a turma se apresentava bem cansada, o professor Alisson cantou a música dos ângulos notáveis no ritmo de Natal e em seguida os alunos acompanharam. Para encerrar a aula, pedimos aos alunos para fazer os exercícios da lista entregue; nesse momento, os professores circulavam pela sala e auxiliavam os alunos com as dúvidas que surgiam. Assim encerrou-se o oitavo encontro do PROMAT.

Nesse dia, após a aula, os professores perceberam que apenas passar o conteúdo dos slides e explicar no quadro não é suficiente, pois os alunos sentem muito sono quando a aula segue esse modelo. Percebemos que eles interagem mais quando há uma atividade prática/manipulativa no meio da aula. Com base nisso, adaptaremos nosso próximo encontro.

13. Encontro 9

13.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 9 – 18/11

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdos: Polígonos e Circunferências.

Professores: Alisson, Maíri, Michelli e Vitor.

Objetivo geral: Relembrar as propriedades dos polígonos e diferenciar os conceitos de circunferência e de círculo.

- Explorar os conceitos dos polígonos através da tabela 1, relacionando suas propriedades e descobrindo as fórmulas para um caso geral.
- Entender quando o polígono é convexo e quando ele é côncavo.
- Compreender os conceitos de perímetro ou de comprimento da circunferência e sua área total;
- Entender o significado e a importância da constante π.

Tempo de execução:

4 aulas.

Recursos didáticos:

Quadro, giz, lápis, borracha, caderno, régua, trena, esquadro e compasso de quadro, jogo kahoot, sala do laboratório.

Encaminhamento metodológico:

1- Revisão da Aula Anterior (30 min).

Iniciaremos a aula retomando e corrigindo atividades da aula anterior, e tirando possíveis dúvidas que os alunos possam ter.

2- Experimentos com Polígonos no GeoGebra (50 min).

Para esse experimento, os alunos receberão uma folha com as seguintes instruções e uma tabela.

1. Acesse o site https://www.geogebra.org/classic;
2. Utilize a ferramenta Polígono Regular e coloque o número de vértices indicados na tabela;
3. Com a ferramenta Segmento, conecte os vértices de modo a formar um triângulo dentro do polígono;
4. Com a ferramenta Ângulo, clique no polígono;
5. Com a ferramenta Segmento, trace segmentos ligando os vértices que não são adjacentes;
6. Agora formule uma generalização para um polígono de n lados.

Tabela 33 – Experimento de polígonos.

Nº de Vértices	Nº de Triângulos (formados a partir de um vértice)	Soma dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno	Números de diagonais em cada vértice	Número total de diagonais
3					
4					
5					
6					
7					
8					
n					

Tabela 1

3- Propriedades de Polígonos (15 min).

Polígono é uma figura plana formada por uma linha fechada simples, composta por segmentos de reta que não se cruzam.

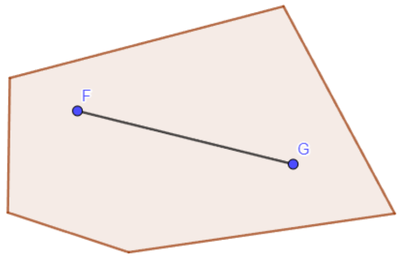
Podemos classificar os polígonos de acordo com a quantidade de lados ou segmentos:

- Triângulo: 3 lados;
- Quadrilátero: 4 lados;
- Pentágono: 5 lados;
- Hexágono: 6 lados;
- Heptágono: 7 lados;
- Octógono: 8 lados;

Os polígonos também podem ser classificados em **convexos** e **não convexos**.

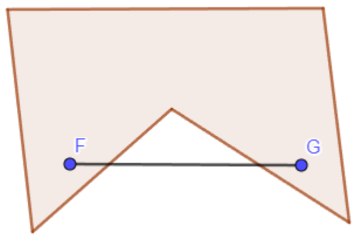
Dizemos que um polígono é **convexo** quando todo segmento de reta, no interior do polígono tem também todos os seus pontos no interior desse polígono.

Figura 112 - Ilustração: polígono convexo.



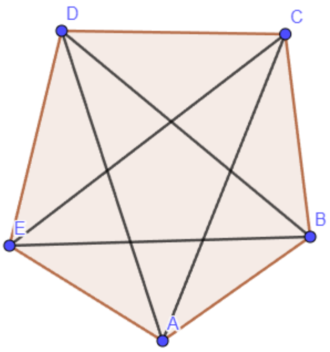
Dizemos que um polígono é **não convexo**, quando um segmento de reta, no interior do polígono não possui todos os seus pontos no interior desse polígono.

Figura 113 - Ilustração: polígono não-convexo.



As **diagonais** de um polígono convexo são os segmentos de reta que unem dois de seus vértices não consecutivos, conforme mostra a ilustração a seguir.

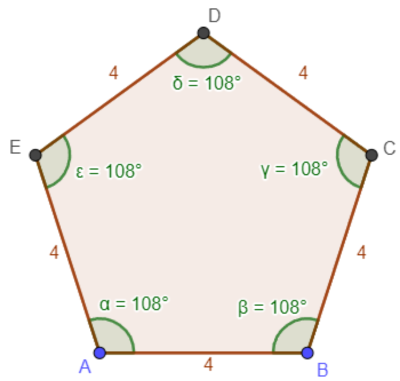
Figura 114 - Ilustração: diagonais.



Note que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CA}$ representam a mesma diagonal, assim como nos demais vértices.

Polígono Regular é todo polígono convexo que tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si.

Figura 115 - Ilustração: polígono regular.



4- Intervalo (30 min).

5- Medindo Circunferências (40 min).

Esse experimento será base para os conceitos que virão no módulo seguinte. Vamos entregar aos alunos uma tabela semelhante à apresentada abaixo:

Tabela 34 - Experimento: Medindo circunferências.

Objeto	**Comprimento da circunferência (C)**	**Medida do diâmetro (D)**	
Sol (planetário)			
Júpiter (planetário)			
Saturno (planetário)			
Órbita da Terra (planetário)			
Mesa redonda			
Banco			
Logo da Unioeste (relógio de sol)			

Os alunos irão realizar as seguintes orientações:

- Com o barbante, será medido o comprimento da circunferência dos objetos acima;
- Com a trena, os alunos irão medir o diâmetro da circunferência desses objetos;
- Após adquirir os dados, retornamos para a sala e discutimos o que esses valores têm em comum.

O próximo módulo irá completar essa atividade.

6- Propriedades de Circunferências (20 min).

Após a coleta dos dados, vamos apresentar a definição de circunferência, falando sobre os principais conceitos relacionados a esse estudo como o raio, a corda, o diâmetro e o perímetro ou comprimento da circunferência.

Tabela 35 - Definição de circunferência.

Definição: Circunferência é uma linha fechada em um plano, na qual, todos os seus pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, chamado de centro.

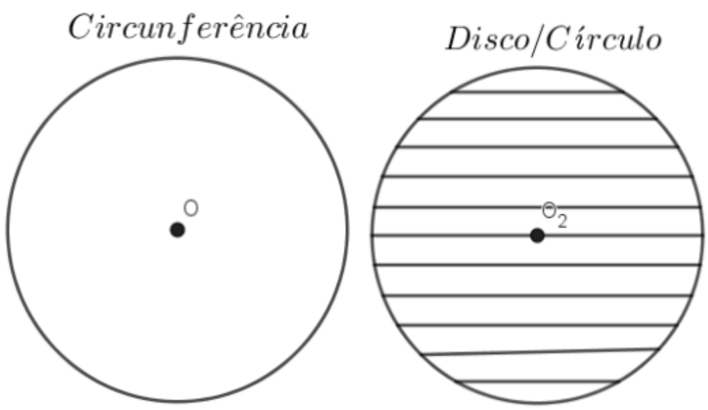
Em uma circunferência, podemos destacar os seguintes elementos:

Raio: Segmento de reta que liga o centro *O* a um ponto qualquer da circunferência.

Corda: Segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.

Diâmetro: É a corda que passa pelo centro da circunferência.

Chamamos de círculo a união dos pontos da circunferência com os pontos que estão em seu interior. Ainda comentaremos sobre a diferença entre círculo e circunferência como no exemplo abaixo.



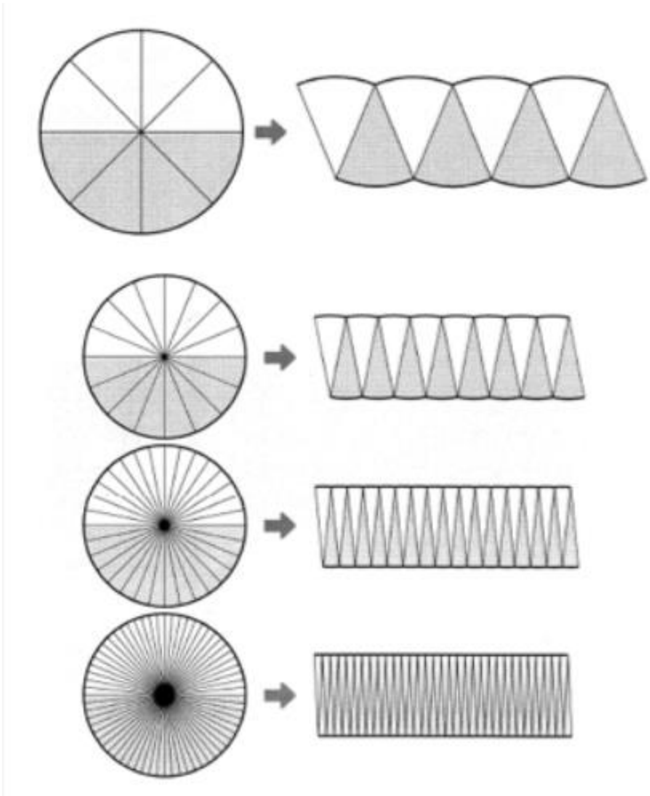
Retornaremos então, aos dados obtidos na tabela. Objetivamos que os alunos observem que todas as divisões tendem a um valor em torno de três.

Tabela 36 - Definição de comprimento da circunferência.

Comprimento da circunferência: O comprimento de qualquer circunferência pode ser obtido pela multiplicação do diâmetro pela constante π = 3,1415… da seguinte forma, $C = d\pi$. Mas, como o diâmetro é o dobro do raio, então, $C = 2\pi r$.

Área do círculo

Figura 116 - Ilustração da área do círculo.



Explicaremos aos alunos que, dado um círculo qualquer, quanto mais dividirmos em partes iguais sua região interna, mais se aproximará de um retângulo. Desta forma, $Área\ do\ círculo = Área\ do\ retângulo = base\ *\ altura$.

Note que, a altura do retângulo é o raio do círculo, e a base do retângulo é a metade da circunferência. Então, temos, $\frac{1}{2} *\ circunferência = \frac{circunferência}{2}$, e sabemos que $circunferência = 2\pi r$. Assim, substituindo na fórmula da área do retângulo ($A = b * a$):

$$A = \frac{2\pi r}{2} * r \rightarrow A = \pi r^2.$$

7- Kahoot (35 min).

Jogo 1 - os polígonos;

Jogo 2 - a circunferência.

8- Atividades:

1) (Cesgranrio). Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer *500 km* sobre uma pista circular de raio *200 m*. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

Resolução:

Primeiro descobrimos o tamanho da pista, que é o comprimento da circunferência, $C = 2\pi r$. Como temos o raio, $C = 2 * \pi * 200$. A questão pede o valor aproximado, então usaremos $\pi = 3{,}14$.

$$C = 2 * 3{,}14 * 200 \rightarrow C = 1256\, m.$$

Como o ciclista deve percorrer *500 km,* devemos converter em metros, então ele percorrerá *500.000 m.* Para saber quantas voltas ele dará dividimos o total percorrido por *x* voltas pelo valor correspondente a uma volta, $número\ de\ voltas = \frac{500.000}{1256} = 398{,}08\ voltas$. Este valor se aproxima mais de *400,* portanto alternativa *d.*

2) Quando o comprimento de uma circunferência aumenta de 10 m para 15 m o raio aumenta:

a) $\frac{5}{2\pi} m$
b) $2{,}5\, m$
c) $5\, m$
d) $\frac{\pi}{5}$
e) $5\pi\, m$

Resolução:

$$C = 2\pi r \rightarrow 10 = 2\pi r \rightarrow \frac{10}{2\pi} = r$$

$$15 = 2\pi r \rightarrow \frac{15}{2\pi} = r$$

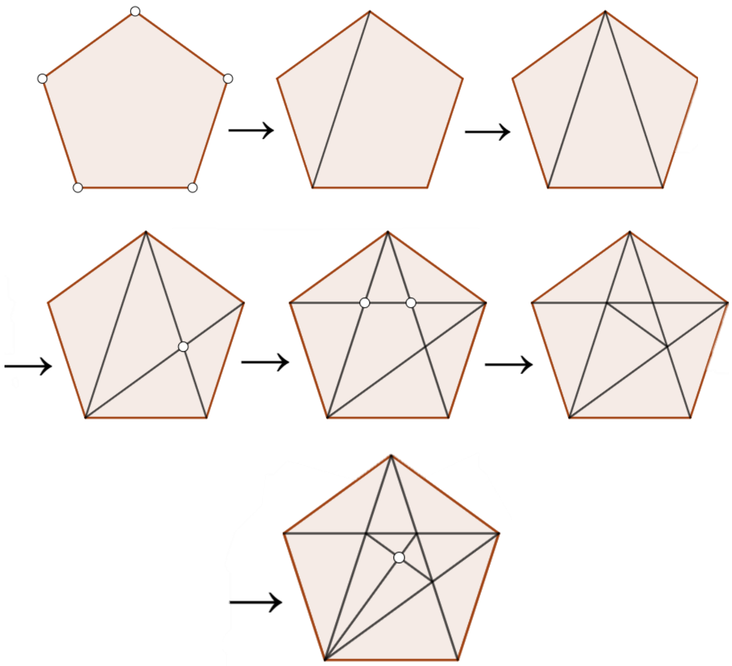
Então, subtraímos o raio maior pelo raio menor, $\frac{15}{2\pi} - \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{2\pi}\ m$. Alternativa a.

3) Dado um pentágono regular, dizemos que um ponto é legal quando:

- Ele é um dos vértices do pentágono ou
- Ele é a interseção de segmentos cujos extremos são pontos legais; esses segmentos são chamados de segmentos legais.

A figura mostra como triangular legalmente um pentágono em 3, 5, 9 e 11 triângulos. Os pequenos círculos indicam os pontos legais que aparecem a cada etapa. Note que a decomposição na quinta etapa, não é uma triangulação legal, pois uma de suas partes é um quadrilátero.

Figura 117 - Ilustração da atividade.



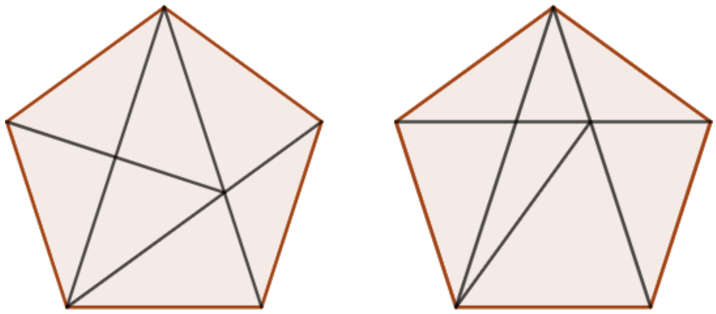
a) Desenhe uma triangulação legal do pentágono em 7 triângulos.

b) Mostre que não é possível triangular legalmente o pentágono em um número par de triângulos.

Resolução:

a) A figura abaixo mostra duas possíveis soluções:

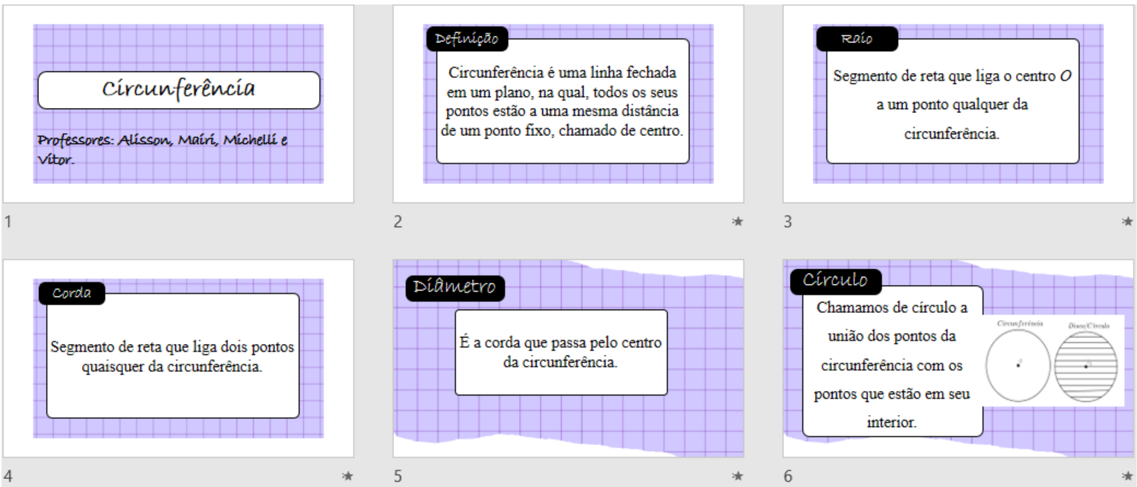
Figura 118 - Ilustração da possível solução.

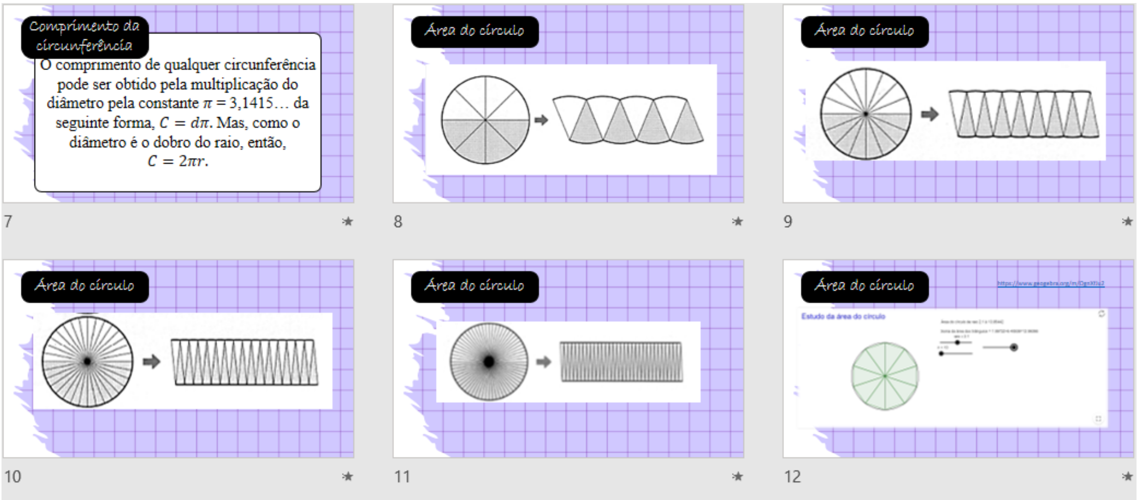


b) Consideremos um pentágono triangulado legalmente, e sejam n o número de triângulos e m o número de pontos legais interiores dessa divisão. A soma dos ângulos de todos os triângulos é $180 * n$ graus. Por outro lado, essa soma é igual à soma dos ângulos em volta dos pontos legais inferiores mais a soma dos ângulos internos do pentágono, ou seja, igual a $360m + 540$ graus. Logo, $180n = 360m + 540,$ ou seja, $n = 2m + 3$ que é um número ímpar.

Slides

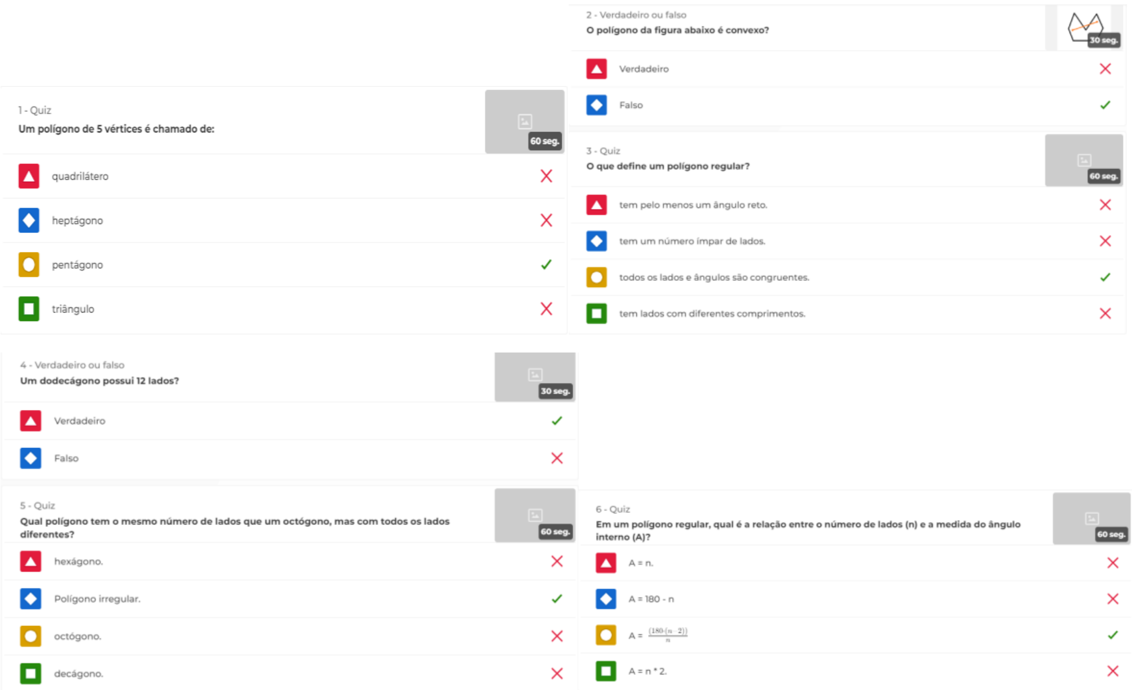
Figura 119 - Slides utilizados em aula.

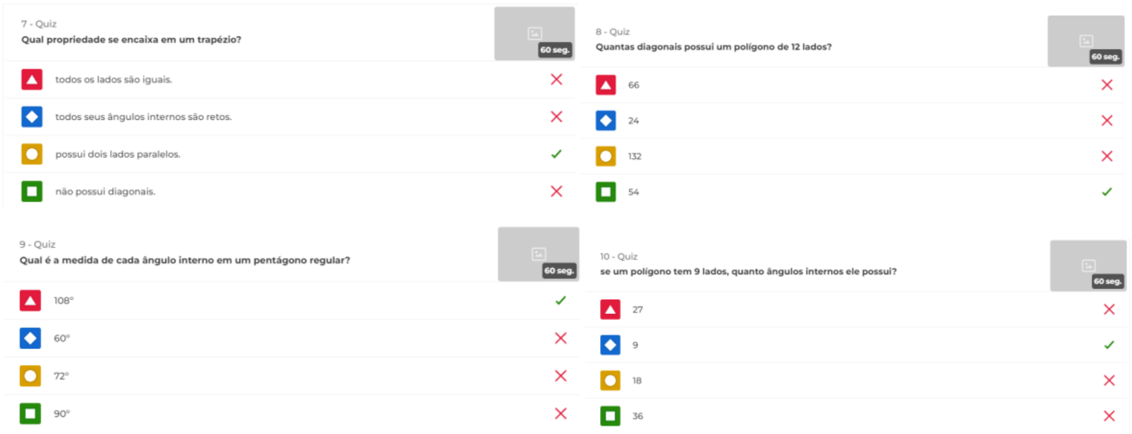




Jogo – Os polígonos

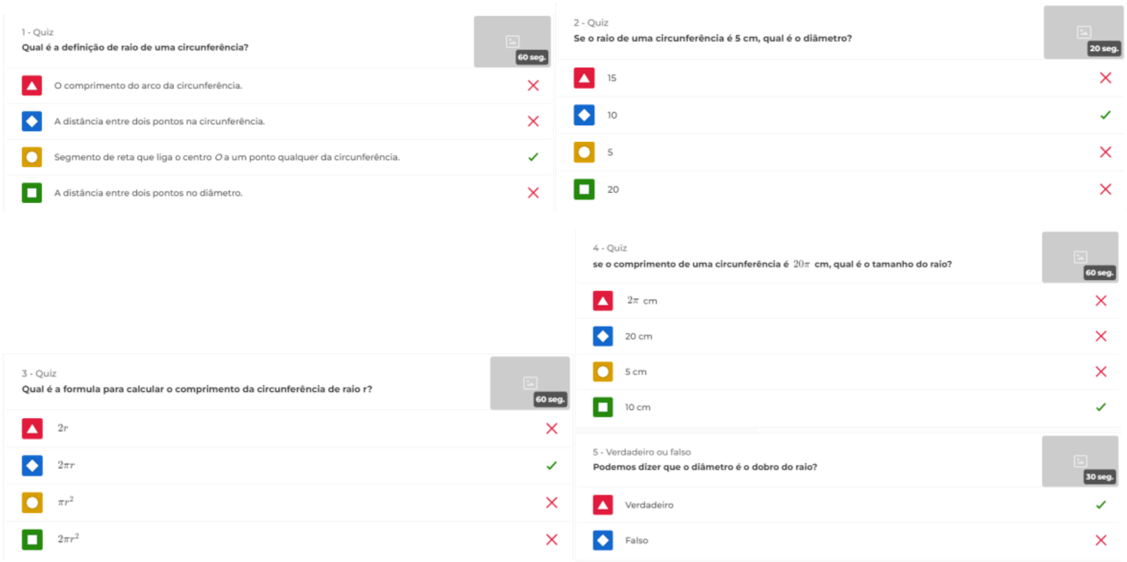
Figura 120 - Questões do jogo.





Jogo – A circunferência

Figura 121 - Questões do jogo.



6 - Quiz

o que é um circulo?

▲	uma linha fechada em um plano, onde todos os seus pontos são equidistantes	✗
◆	Segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência.	✗
●	união dos pontos da circunferência com os pontos que estão em seu interior	✓

60 seg.

7 - Quiz

qual é a formula da área da circunferência?

▲	$A = b \cdot h$	✗
◆	$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$	✗
●	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	✗
■	$A = \pi r^2$	✓

60 seg.

8 - Verdadeiro ou falso

Um círculo é a mesma coisa que uma circunferência?

▲	Verdadeiro	✗
◆	Falso	✓

30 seg.

9 - Quiz

Se a área de um círculo é $25\pi \ cm^2$, qual é seu diâmetro?

▲	5	✗
◆	10	✓
●	25	✗
■	5π	✗

60 seg.

10 - Verdadeiro ou falso

Podemos deduzir a área do circulo a partir da área do retângulo?

▲	Verdadeiro	✓
◆	Falso	✗

20 seg.

13.2 Material entregue aos alunos

Figura 122 - Material entregue aos alunos.

PROMAT 1

PROMAT

Polígonos

- **Experimento**

1- Acesse o site https://www.geogebra.org/classic;

2- Utilize a ferramenta Polígono Regular e coloque o número de vértices indicados na tabela;

3- Com a ferramenta Segmento, conecte os vértices de modo a formar um triângulo dentro do polígono;

4- Com a ferramenta Ângulo, clique no polígono;

5- Com a ferramenta Segmento, trace segmentos ligando os vértices que não são adjacentes;

6- Agora formule uma generalização para um polígono de n lados.

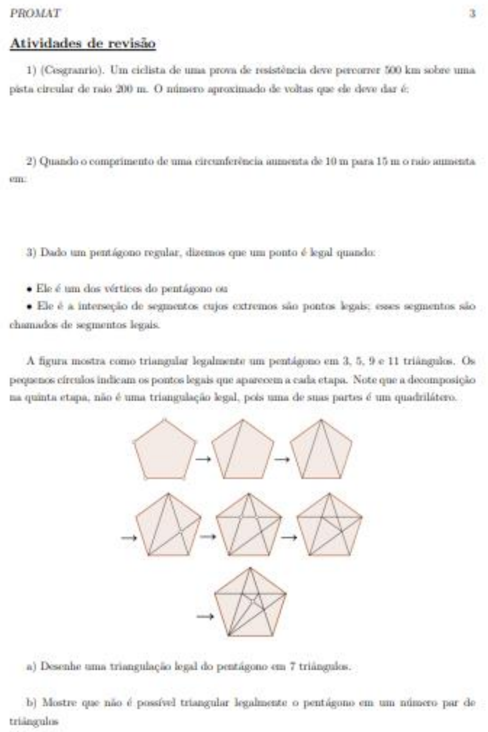
Nº de Vértices	Nº de Triângulos (formados a partir de um vértice)	Soma dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno	Números de diagonais em cada vértice	Número total de diagonais
3					
4					
5					
6					
7					
8					
n					

PROMAT 2

Circunferências

- **Experimento**

Objeto	Comprimento da circunferência (C)	Medida do diâmetro (D)	
Sol (planetário)			
Júpiter (planetário)			
Saturno (planetário)			
Órbita da Terra (planetário)			
Mesa redonda			
Banco			
Logo da Unioeste (relógio de sol)			



PROMAT 3

Atividades de revisão

1) (Cesgranrio). Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:

2) Quando o comprimento de uma circunferência aumenta de 10 m para 15 m o raio aumenta em:

3) Dado um pentágono regular, dizemos que um ponto é legal quando:

• Ele é um dos vértices do pentágono ou

• Ele é a interseção de segmentos cujos extremos são pontos legais; esses segmentos são chamados de segmentos legais.

A figura mostra como triangular legalmente um pentágono em 3, 5, 9 e 11 triângulos. Os pequenos círculos indicam os pontos legais que aparecem a cada etapa. Note que a decomposição na quinta etapa, não é uma triangulação legal, pois uma de suas partes é um quadrilátero.

a) Desenhe uma triangulação legal do pentágono em 7 triângulos.

b) Mostre que não é possível triangular legalmente o pentágono em um número par de triângulos

13.3 Relatório

9° ENCONTRO (11/11/2023)

Sala A209

Grupo de estagiários: Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

No dia 18 de novembro de 2023, iniciou-se o nono encontro do PROMAT, em que abordamos os conteúdos de geometria, com foco nas propriedades dos polígonos e na diferenciação dos conceitos de circunferência e de círculo.

Iniciamos a aula corrigindo as questões da lista de revisão, a qual foi entregue no final da aula passada. Após corrigir as atividades e esclarecer as dúvidas que surgiram, aproveitando que estávamos no laboratório de informática, demos continuidade na aula solicitando para que os alunos acessassem a plataforma GeoGebra. Entregamos aos alunos uma tabela para que preenchessem as diversas características do polígono, as quais são: número de vértices, número de triângulos formados a partir de um vértice, soma dos ângulos internos, medida de cada ângulo interno, números de diagonais em cada vértice e o número total de diagonais. Tais questionamentos tem como intuito fazer com que, ao final, o aluno generalize as fórmulas para encontrar cada aspecto perguntado. Após o tempo determinado para a realização de tal atividade ter se esgotado, realizamos a correção na lousa e, ao finalizar, liberamos os alunos para o intervalo.

Ao retornarmos, demos continuidade ao conteúdo com as propriedades dos polígonos, suas duas classificações (convexo, não convexo), as diagonais de um polígono e o que é um polígono regular. Finalizado o primeiro conteúdo desta nona aula, trouxemos uma dinâmica que foi realizada ao ar livre, utilizando o relógio de sol e o planetário que temos no Espaço Ciência da Unioeste no Campus de Cascavel. A atividade teve com objetivo identificar o comprimento das circunferências e das medidas dos diâmetros dos objetos que tinham disponíveis para serem calculados, em que foram utilizados a trena e o barbante para que realizassem as medições. Após a coleta dos dados, retornamos ao laboratório de informática e apresentamos a definição de circunferência, falando sobre os principais conceitos relacionados a esse estudo como o raio, a corda, o diâmetro e o perímetro ou comprimento da circunferência.

Depois de apresentado todo o conteúdo proposto, recapitulamos a aula com dois jogos na plataforma Kahoot, o primeiro sendo sobre o conteúdo de polígonos e o segundo sendo sobre o conteúdo de circunferências. Assim que ambos foram concluídos, foi entregue uma lista de exercícios para que fizessem em casa e desta forma se encerrou este encontro.

14. Gincana

14.1 Plano de aula

PROMAT: Encontro 10 (Gincana) – 25/11

A gincana será realizada com todos os alunos que participaram das aulas do PROMAT ofertadas no segundo semestre de 2023 (primeiro semestre letivo da Unioeste), as quais foram ministradas pelos acadêmicos matriculados na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I.

A gincana será composta por oito estações distintas, cada uma sob a responsabilidade de um estagiário. Os alunos, que serão divididos em oito grupos, passarão pelas estações para realizar as atividades sugeridas. As atividades propostas estão descritas na sequência.

- As atividades serão realizadas segundo o cronograma de tempo de duração a seguir (horas:minutos):

* 8:20 – 8:35;
* 8:40 – 8:55;
* 9:00 – 9:15;
* 9:20 – 9:35;
* 9:40 – 9:55;
* 10:00 – 10:15;
*10:20 – 10:35;
* 10:40 – 10:55;

Estação 1 – Tangram (Sala 49)

Responsáveis: Alisson e Vitor;

Será disponibilizado para cada integrante do grupo um Tangram. Então será solicitado que montem quadrados utilizando as peças do quebra cabeça. Para isso, serão instruídos da seguinte forma:

1º Montar um quadrado com apenas 1 peça do Tangram;

2º Montar um quadrado com 2 peças do Tangram;

3º Montar um quadrado com 3 peças do Tangram;

4º Montar um quadrado com 4 peças do Tangram;

5º Montar um quadrado com 5 peças do Tangram;

6º Montar um quadrado com as 7 peças do Tangram;

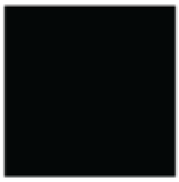
A pontuação será dada pela finalização das etapas. Quando todos os integrantes da equipe finalizarem a montagem do quadrado, a equipe ganha 1 ponto, por tipo de quebra cabeça montado. Isso significa que, em algumas etapas existe a possibilidade de a equipe obter mais de 1 ponto.

Por exemplo, na montagem do quadrado com duas peças, é possível montá-lo com dois triângulos pequenos ou 2 triângulos grandes. Caso a equipe utilize as duas formas, ganham 2 pontos.

Soluções e Pontuação:

1º Quadrado com 1 peça: 1 ponto

Figura 123 - Ilustração: quadrado com uma peça.

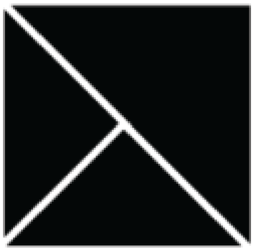


2º Quadrado com 2 peças: até 2 pontos

Figura 124 - Ilustração: quadrado com duas peças.

3º Quadrado com 3 peças: 1 ponto.

Figura 125 - Ilustração: quadrado com três peças.



4º Quadrado com 4 peças: até 3 pontos.

Figura 126 - Ilustração: quadrado com quatro peças.

5º Quadrado com 5 peças: 1 ponto.

Figura 127 - Ilustração: quadrado com cinco peças.

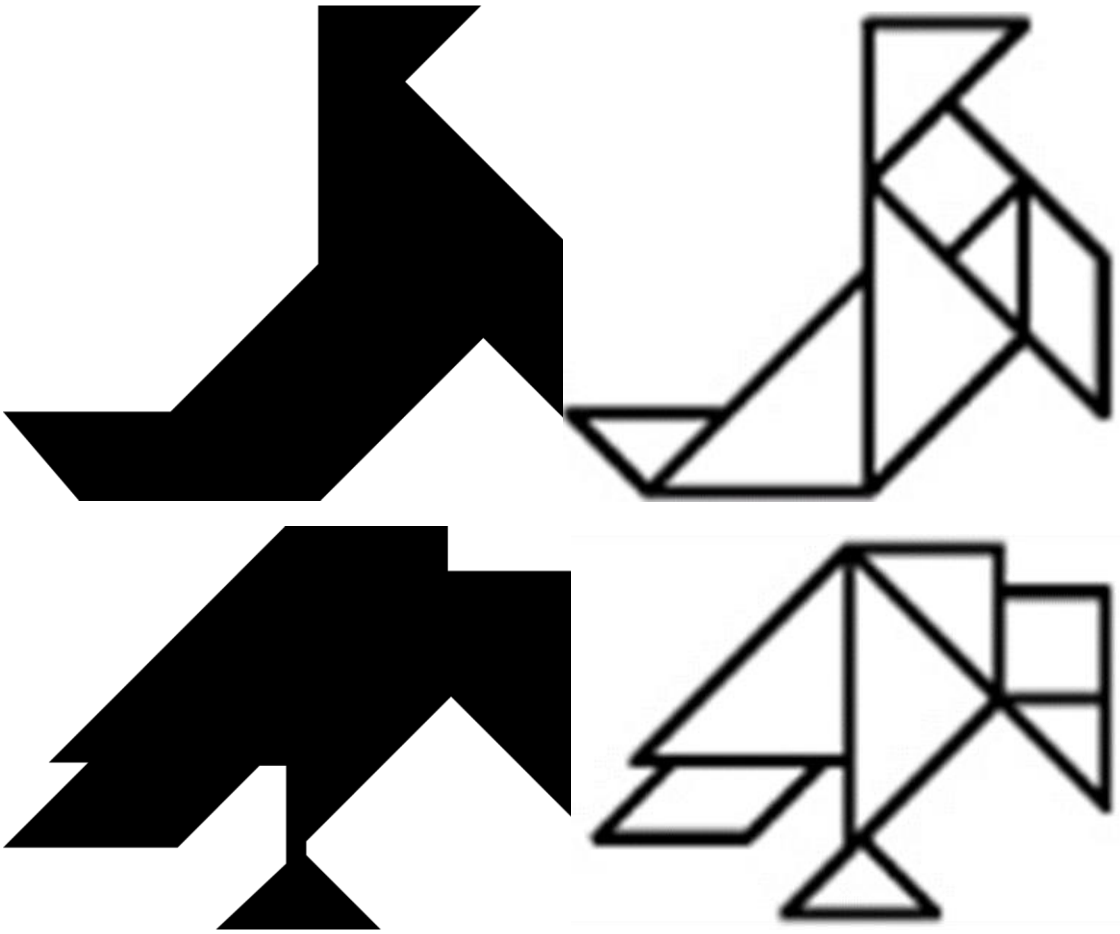
6º Quadrado com 7 peças: 1 ponto.

Figura 128 - Ilustração: quadrado com sete peças.

Total de Pontos: 9

Em caso de sobra de tempo, as equipes devem construir formas de animais com o Tangram, podendo obter pontos extras.

Figura 129 - Ilustração: formas de animais.



Estação 2 – Blackjack de polinômios (LIM)

Responsáveis: Felipe Augusto e Felipe Simão;

Por meio do baralho adaptado para polinômios (já confeccionado), será jogado o jogo Blackjack (ou vinte e um) com os alunos. O baralho utilizado é composto pela junção de 4 baralhos menores que contêm as seguintes 36 cartas:

$$Ax,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x,\ 6x,\ 7x,\ 8x,\ 9x,\ 10x,\ 10x,\ 10x$$

$$Ax^2,\ 2x^2,\ 3x^2,\ 4x^2,\ 5x^2,\ 6x^2,\ 7x^2,\ 8x^2,\ 9x^2,\ 10x^2,\ 10x^2,\ 10x^2$$

$$Ax^3,\ 2x^3,\ 3x^3,\ 4x^3,\ 5x^3,\ 6x^3,\ 7x^3,\ 8x^3,\ 9x^3,\ 10x^3,\ 10x^3,\ 10x^3$$

O número A que multiplica alguns monômios vale 1 ou 11 (o que for mais vantajoso para quem possui a carta). Nesse jogo, os participantes não competem entre si: todos jogam contra o *dealer.*

O professor fixo na sala será o *dealer* do jogo. No início, serão entregues duas cartas para todos (inclusive ao *dealer*), as quais podem ser vistas por todos os jogadores. Ao receberem suas cartas, os participantes devem somar os monômios obtidos (só podemos somar monômios de mesma parte literal!). Na sua vez de jogar, o aluno escolhe se deseja comprar mais uma carta ou não. Ao comprar uma nova carta, soma-se o monômio presente nela com o restante das suas cartas. O intuito do jogo é fazer com que um dos 3 coeficientes do polinômio chegue o mais próximo possível de 21, mas sem extrapolar esse valor. Caso algum coeficiente seja maior do que 21, o jogador "estoura" e perde o jogo. Para ganhar, o participante deve:

- Não estourar;
- Ter um coeficiente em seu polinômio que seja maior do que todos os coeficientes do polinômio do *dealer.*

Se o *dealer* estourar, todos os participantes que ainda não estouraram ganham automaticamente.

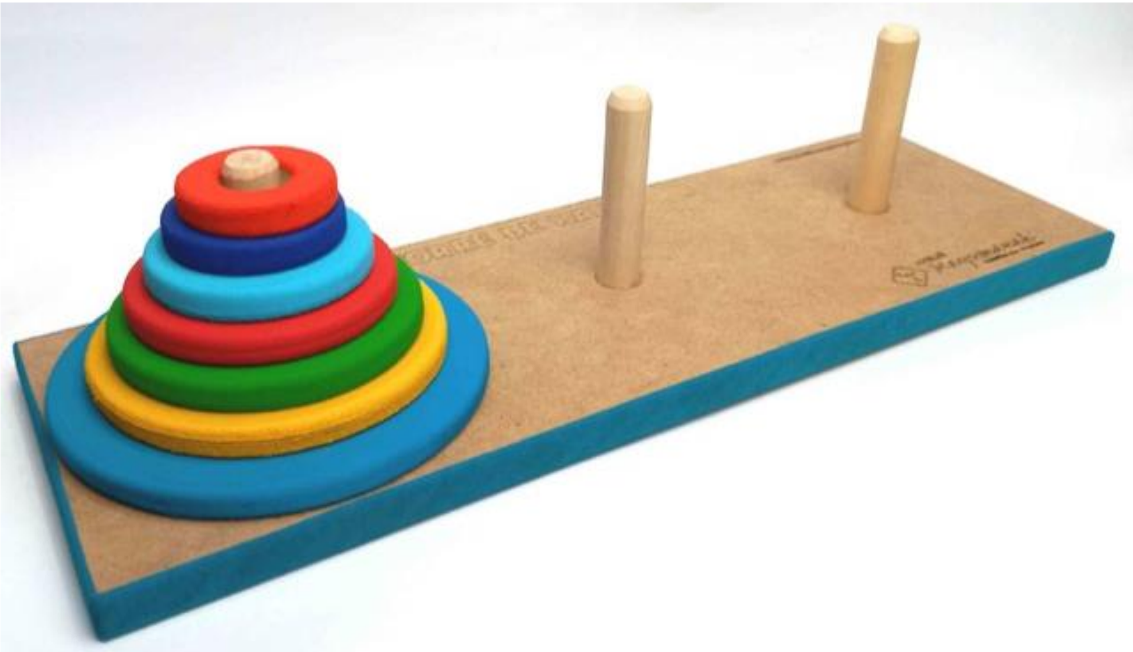
A contabilização de pontos será feita da seguinte maneira: serão feitos 15 jogos com os alunos (considerando um grupo de 5 pessoas, serão feitas 3 rodadas. Se houver grupos com um número diferente de pessoas, jogamos de tal modo que aconteçam 15 jogos no total). Será anotada a quantidade de vitórias de cada grupo e, ao final, o grupo que tiver mais vitórias ganhará 9 pontos, o grupo em 2° lugar no número de vitórias ganha 8 pontos e assim por diante até que o último grupo ganhe 2 pontos.

Estação 3 – Torre de Hanói (Caracol)

Responsáveis: Luiza e Theo;

Disponibilizaremos a cada grupo de alunos uma torre de Hanói. O objetivo será passar todas as peças do pino da extrema direita ao pino da extrema esquerda sem sobrepor uma determinada peça com uma peça maior.

Figura 130 - Ilustração da Torre de Hanói.



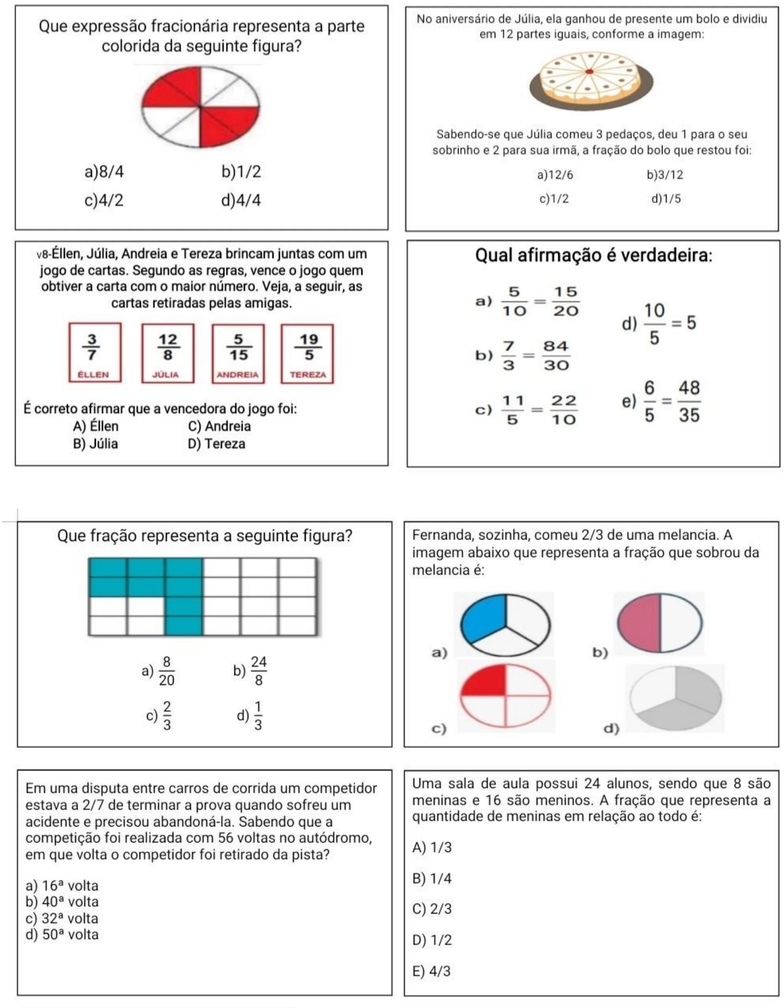
A primeira rodada será com apenas três discos e conforme os alunos concluírem a transposição de todas as peças, será adicionado mais um disco, e assim sucessivamente até realizarem o desafio com 6 discos. Cada grupo terá o tempo máximo de 15 minutos para realizar o máximo de transposições que conseguirem. O grupo ganhará um ponto por cada peça que conseguir passar para o pino da extrema direita de maneira correta. Também aos grupos que conseguirem concluir todas as transposições em menos de 15 minutos, serão concedidos pontos extras seguindo a regra de 7 pontos para o grupo com menor tempo, 6 para o segundo menor tempo, 5 para o terceiro menor tempo e assim sucessivamente.

Estação 4 – Jogo de Dardos das Frações (Cantina)

Responsáveis: Milleni e Fabrício;

Essa atividade é composta por 12 cartas contendo perguntas e problemas sobre frações. Cada grupo terá que escolher até 8 cartas para serem respondidas, sem saber quais perguntas estão nas cartas. Para cada acerto terão direito a lançar dois dardos em direção ao alvo, que tem pontuação variando entre 1 e 9 dependendo de onde o dardo for acertado. Caso o dardo não seja acertado no alvo, o grupo não pontuará e caso seja acertado no centro do alvo receberá 13 pontos. Para a pontuação de cada rodada será contado apenas o dardo que atingiu a maior pontuação entre os dois lançamentos.

Figura 131 - Ilustração das atividades.



Uma herança será repartida entre 3 herdeiros. Mariana é uma das herdeiras, e ficará com 1/4 dessa herança. Matheus ficará com 2/5. O restante é de Jovair. Então a fração que representa a parte da herança de Jovair é:

A) 3/20

B) 7/20

C) 13/20

D) 7/10

E) 13/10

Julgue as afirmativas as seguir:
I – Toda fração imprópria é um número maior que 1.
II – Toda fração própria é um número menor que 1.
III – As frações 2/3 e 8/12 são equivalentes.
Marque a alternativa correta:
A) Somente a I é falsa
B) Somente a II é falsa
C) Somente a III é falsa
D) I e II são falsas.
D) Todas são verdadeiras

Pedro ganhou 70 reais de aniversário, gastou 2/5 desse valor na loja de brinquedos e 10 reais na sorveteria. Quanto ainda lhe resta?

a) 32

b) 38

c) 42

d) 48

e) 60

Determinado condomínio trocou seu reservatório de água, com capacidade para 15000 litros, por outro dois terços maior. Qual é a capacidade do novo reservatório?

a) 10000 l.

b) 15000 l.

c) 20000 l.

d) 25000 l.

e) 30000 l.

Figura 132 - Ilustração do alvo.

No final, será somada a pontuação total de cada grupo com os lançamentos.

A pontuação para a gincana será definida de acordo com a pontuação de cada grupo no lançamento de dardos da seguinte forma:

O grupo com a maior soma de pontos de lançamentos de dardos receberá 10 pontos para a gincana, o segundo grupo maior pontuador receberá 9 pontos, o terceiro receberá 8 pontos, o quarto 7 pontos, o quinto e sexto colocados 6 pontos e os dois grupos com as menores pontuações receberam 5 pontos.

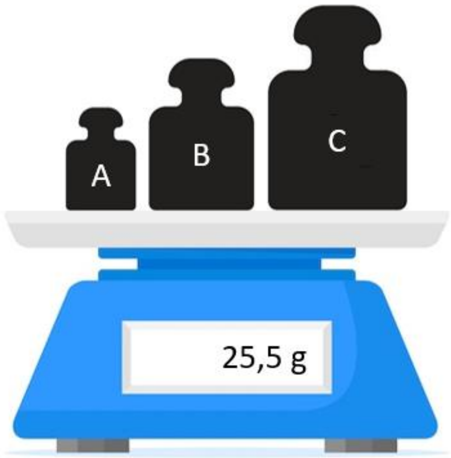
Estação 5 – Atividade das Massas + Sistemas (Lab. de Física)

Responsáveis: Maíri e Michelli;

Essa atividade tem como objetivo determinar a massa de objetos por meio de sistemas de equações. Será utilizado o Laboratório de Física, em que serão necessários para a atividade uma balança digital, e objetos com massas variadas.

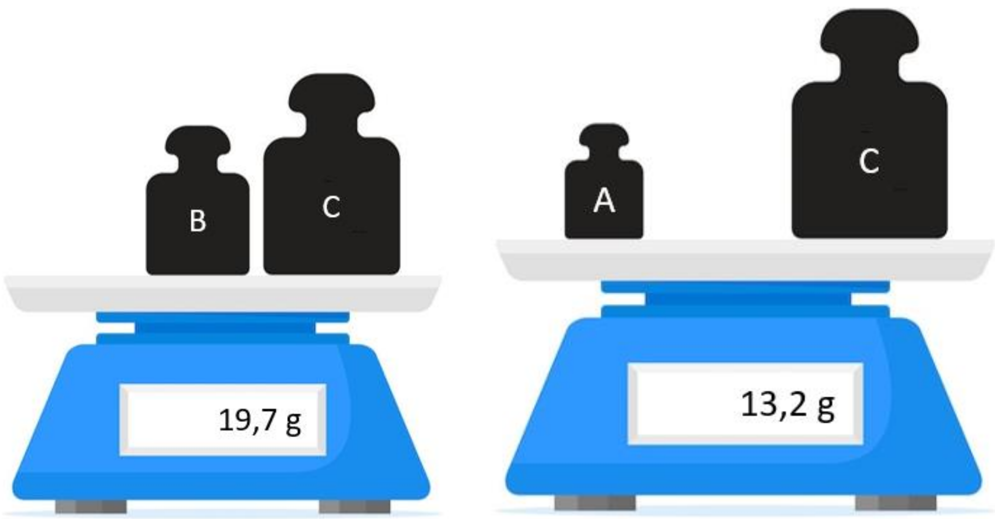
Por exemplo: queremos descobrir a massa do peso C:

Figura 133 - Ilustração: balança.



Para isso podemos remover e adicionar outros objetos, desde que o peso que procuramos a massa não fique sozinho na balança ou seja retirado da balança. Então podemos mexer nos pesos A e B, enquanto C fica fixo.

Figura 134 - Ilustração: balança.



Nesse momento, os participantes deverão montar um sistema de equações para descobrir o valor de C:

$$\begin{cases} A + B + C = 25{,}5 \\ B + C = 19{,}7 \\ A + C = 13{,}2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que:

$$C=7{,}4 \text{ g.}$$

A pontuação será definida pela quantidade de sistemas resolvidos, então para isso, serão disponibilizados diversos kits com objetos com massas diferentes.

Estação 6: Desafio da Cesta + Equação do Segundo Grau (LEM)

Responsáveis: Márcio e Raiany;

Objetivo do Jogo:

Os alunos terão a oportunidade de praticar arremessos na cesta enquanto resolvem equações do segundo grau para ganhar pontos.

Materiais Necessários:

- Cesta de basquete (lixeira);
- Bolas de basquete (bolas de plástico);
- Lista de equações do segundo grau;
- Quadro ou papel para anotar os pontos;

Configuração do Jogo:

- Cada participante da equipe arremessará com o intuito de acertar a cesta.
- Caso o participante erre o arremesso, volta para o final da fila.
- Se o participante acertar, o jogador deverá resolver uma equação do segundo grau. Assim que o participante encontrar o resultado, a equipe acumula 1 ponto.
- O próximo jogador só poderá fazer o arremesso assim que o integrante que acertou a cesta resolver corretamente a equação do segundo grau.

- Todos os integrantes podem auxiliar no processo de resolução, porém devem permanecer nos lugares, ou seja, na fila para arremesso.
- A atividade ocorrerá pelo prazo de 15 minutos.
- Ao final, a pontuação será contabilizada com pontos ilimitados.

Estação 7 – Varal de Frações (Hall de entrada)

Responsáveis: Ruan e Shimmer;

A atividade do Varal de Frações é uma proposta que visa desenvolver a habilidade dos alunos em ordenar números, especialmente em suas formas fracionárias. Na dinâmica, os participantes terão a tarefa de organizar 13 cartas numeradas inicialmente empilhadas sobre uma mesa. O desafio consiste em colocar as cartas em ordem crescente correta, considerando as representações fracionárias ou decimais presentes em cada uma delas.

O sistema de pontuação busca incentivar a precisão na ordenação. O time ganhará um ponto por carta em seu lugar correto. Estar no "lugar correto" significa que as cartas diretamente à esquerda e diretamente à direita são, de fato, as corretas dentre todas as cartas. Para as cartas de ponta, basta apenas a carta subsequente (ou anterior) estar correta.

Essa abordagem recompensa não apenas a capacidade de ordenação, mas também a consistência na análise e posicionamento dos números representados nas cartas, isso pois, a cada carta colocada corretamente, o aluno tem meio caminho andado para outras duas cartas.

Para ilustrar como a pontuação funciona, considere o exemplo em que um participante ordena as cartas numeradas como $\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2}$. Já que as cartas $\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right\}$ estão na ordem correta, ele recebe 1 ponto pela carta $\frac{1}{5}$, que está corretamente na ponta e com o $\frac{1}{4}$ à direita. O aluno recebe também um ponto pela carta $\frac{1}{4}$, que está corretamente entre as cartas $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{3}$. No entanto, não recebe pontos por nenhuma outra carta, pois a carta $\frac{1}{3}$ só possui à sua esquerda uma carta de ordem correta e carta 1 não possui a carta correta à sua esquerda, finalizando então com 2 pontos.

A atividade acaba se todas as cartas forem ordenadas corretamente ou ao final dos 15 minutos previstos para a atividade.

Estação 8 – Jogo dos quatro quatros (Parquinho)

Responsáveis: Milena e Eduardo;

A atividade consiste em construir os números de 0 até 10, sempre com 4 quatros (4 algarismos) utilizando apenas das quatro operações básicas da matemática: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Cada número encontrado contará como um ponto.

Algumas possíveis expressões que dão os números de 0 a 10 são:

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4;$$

$$1 = \frac{44}{44};$$

$$2 = \frac{4 * 4}{4 + 4};$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4};$$

$$4 = \frac{4 - 4}{4} + 4;$$

$$5 = \frac{(4 * 4) + 4}{4};$$

$$6 = \frac{4 + 4}{4} + 4;$$

$$7 = \frac{44}{4} - 4;$$

$$8 = \frac{4 * (4 + 4)}{4};$$

$$9 = \frac{4}{4} + (4 + 4);$$

$$10 = \frac{44 - 4}{4}.$$

14.2 Relatório

10º ENCONTRO (25/11/2023)

Grupo de estagiários: Alisson Pereira, Maíri Poeta, Michelli Neves e Vitor Augusto.

Para dar início à gincana, os alunos das quatros turmas do PROMAT foram realocados para uma única sala para ouvirem o comunicado que foi feito pela Professora Francieli referente a todos os encontros, os agradecendo pela presença e explicando qual seria a dinâmica a ser realizada neste último e décimo encontro. Enquanto os alunos ouviam, os encarregados a separarem a turma em duas equipes (azul e branca) foram os estagiários Alisson e Maíri, e os outros dois estagiários Michelli e Vitor, ficaram encarregados das estações.

O estagiário Vitor ficou responsável pela Estação 1, onde foi trabalhado o Tangram. Para recepcionar os alunos, os quebra-cabeças foram colocados em uma mesa, sendo um exemplar por pessoa. O nível de dificuldade do jogo foi gradativo e todas as equipes conseguiram resolver até o passo quatro sem a necessidade de dicas, apenas a duração da atividade variou para alguns grupos. Já para o quinto passo, o quadrado com cinco peças do Tangram, duas equipes conseguiram montá-lo sem o auxílio de dicas. Os outros grupos apresentaram um pouco de dificuldade nessa etapa, mas, ao saberem que, para realizar essa construção não se utiliza os triângulos grandes, conseguiram montar rapidamente. Por fim, no quadrado de sete peças, metade dos grupos resolveram sem o auxílio de dicas, e, para a outra parte, a dica foi para utilizarem os triângulos grandes como metade do quadrado.

Os quatro primeiros grupos finalizaram a montagem do quadrado com todas as peças do Tangram no limiar do tempo estipulado. Enquanto as demais equipes conseguiram finalizá-lo em menos tempo. Então para preencher o tempo restante foi solicitado aos alunos que encontrassem mais formas de formar um quadrado com quatro peças, e que montassem uma das figuras descritas no plano.

A estagiária Michelli ficou responsável pela Estação 5, onde foi trabalhado sistemas de equações. A organização se deu no Laboratório de Física, e lá foi disponibilizado uma balança e 10 sistemas de massas a serem calculados. Estes ficaram em cima de uma bancada e foram separados em níveis: sistemas com 3, 4 e 5 equações. Seguindo o roteiro, a primeira turma a chegar foi a branca. Esse grupo e todos os outros demoraram um pouco para desenvolver o primeiro sistema, mas, depois que conseguiam, eles faziam os outros tranquilamente. O grupo branco apresentou-se animados com a atividade, conseguindo desenvolver alguns dos sistemas com êxito, eles não apresentaram muitas dificuldades referente à atividade. O grupo roxo entendeu rapidamente a atividade e resolveram de formas diferentes, não apresentando dificuldades, porém o tempo não foi suficiente para resolver todos os sistemas. Os grupos amarelo e vermelho apresentaram um desempenho semelhante referente as táticas utilizadas durante a resolução das atividades. O grupo azul foi o que apresentou um pouco mais de dificuldade, entretanto, após algumas dicas do guia, eles conseguiram desenvolver um sistema durante o tempo previsto para a atividade. O grupo verde e o grupo marrom foram os mais competitivos, eles resolveram cerca de nove sistemas com êxito e não apresentaram nenhuma dificuldade. O grupo preto também não apresentou dificuldades, mas apresentavam-se um pouco cansados pois já era o fim da gincana. A estação 5 apresentou uma variação de pontuação entre 1 e 10 pontos.

A equipe azul era composta por 4 alunos e pelo estagiário Alisson. Frente às atividades já definidas anteriormente, esta equipe se mostrou muito participativa, com envolvimento de todos os integrantes. Os alunos conseguiram concluir quase todas as atividades, exceto a passagem pela estação 5. Nesta estação eles não conseguiram associar a atividade proposta com sistemas lineares. Diante do tempo já avançado, o estagiário Alisson deu algumas dicas, mostrando uma possível estrutura do algoritmo para desenvolver a conta, mas os alunos não lembravam de nenhum método para tentar a resolução. Nas outras atividades, embora todos participassem e concluíssem a proposta, isso não significava êxito, pois os alunos as vezes titubeavam, demonstravam confusão ou incertezas e os erros apareciam. Vale a pena lembrar que, como o estagiário não poderia intervir ou ajudar diretamente, a pontuação dependia exclusivamente do desempenho dos alunos. De maneira geral, os alunos se mostraram satisfeitos e entusiasmados com todas as atividades, alguns disseram que entenderam melhor alguns conteúdos através das dinâmicas realizadas.

A equipe branca foi formada por três alunos e o estagiário Maíri, que tinha a função de levá-los às oito estações para que realizassem as atividades propostas. O desenvolvimento desta equipe durante todo o percurso foi linear, em que conseguiam realizar as atividades em conjunto, e as dificuldades que encontravam eram superadas ao se juntarem para resolvê-las. Tiveram êxito em todas as estações. Houve apenas um caso em que um dos integrantes da equipe não se interessou em realizar a atividade por ter receio de prejudicar a pontuação do grupo, no entanto, os outros componentes desse grupo o tranquilizaram e o auxiliaram a realizar a atividade com sucesso. Era perceptível que todos ali estavam intrigados com todas as dinâmicas apresentadas. De forma geral, os alunos se mostraram contentes com seus desempenhos e, por conta da união destes alunos, conseguiram ficar em segundo colocado da gincana composta por oito equipes.

15. Considerações finais

Durante o período de estágio, a abordagem das atividades foi na direção oposta do modelo de ensino tradicional, com o foco na aplicação de atividades práticas que incentivassem os alunos a refletir sobre o conteúdo de uma forma diferente, como destacado por Cardoso (2021) ao criticar a abordagem passiva e muitas vezes desanimadora. Embora a maioria das aulas tenha sido preparada com essa proposta, algumas aulas específicas, devido talvez à quantidade de conceitos a serem explorados, foram aplicadas utilizando uma abordagem mais tradicional. Nesses momentos, o engajamento dos alunos foi significativamente menor, mostrando a importância das abordagens mais dinâmicas para manter o interesse e a participação ativa dos estudantes.

As metas planejadas para cada aula foram, em sua maioria, alcançadas, mas não sem o esforço devido por parte dos alunos e dos estagiários. As metodologias mais aproveitadas foram o uso de jogos e a organização dos alunos em grupos, encorajando a participação e o envolvimento dos estudantes. O feedback fornecido pelos alunos foi valioso, contribuindo para o aprimoramento das estratégias de ensino ao longo das aulas.

A experiência de estágio possibilitou uma reflexão sobre a prática docente, revelando aspectos que precisam ser aprimorados, como a velocidade da fala e a maneira como as explicações são feitas. Essas observações proporcionaram um processo de aprendizagem constante, essencial para o crescimento profissional.

16. Referências

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.; SILVER, Edward A. Rational-Number Concepts. Em: LESH, Richard; LANDAU, Marsha (ed). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York:Academic Press, 1983.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CABRAL, Marcos Aurélio et al. A utilização de jogos no ensino de matemática. 2006.

CARDOSO, Alesandra Lopes et al. MATEMÁTICA GAMEFICADA: TOON MATH ENDLESS COMO FERRAMENTA DE ENSINO. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 7, n. 11, p. 1060-1074, 2021.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática - 9º Ano. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010.

OLIVEIRA, Marcelo de Sousa. Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco. **Revista BOEM**, v. 7, n. 14, p. 79-93, 2019.

FERNANDES, L. D. et al. Jogos no Computador e a Formação de Recursos Humanos na Indústria. VI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Anais. Florianópolis: SBCUFSC, 1995.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. A conquista da matemática: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GRANDO, Regina Célia. RECURSOS DIDÁTICOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, [S.L.], v. 5, n. 02, p. 393-416, 27 set. 2019. IFES – Instituto Federal do Espirito Santo. http://dx.doi.org/10.36524/dect.v5i02.117.

OLIVEIRA, Auretides Profiro de et al. JOGOS MATEMÁTICOS DO PROJETO NOVO MAIS EDUCAÇÃO: análise a partir das unidades temáticas para os anos iniciais do ensino fundamental segundo a BNCC. 2022.

SILVA, A. G. S.; SOUSA, F. J. F. de; MEDEIROS, J. L. de. Teaching mathematics: historical aspects. **Research, Society and Development**, *[S. l.]*, v. 9, n. 8, p. e488985850, 2020. DOI: 10.33448/rsd-v9i8.5850. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/5850. Acesso em: 28 nov. 2023.